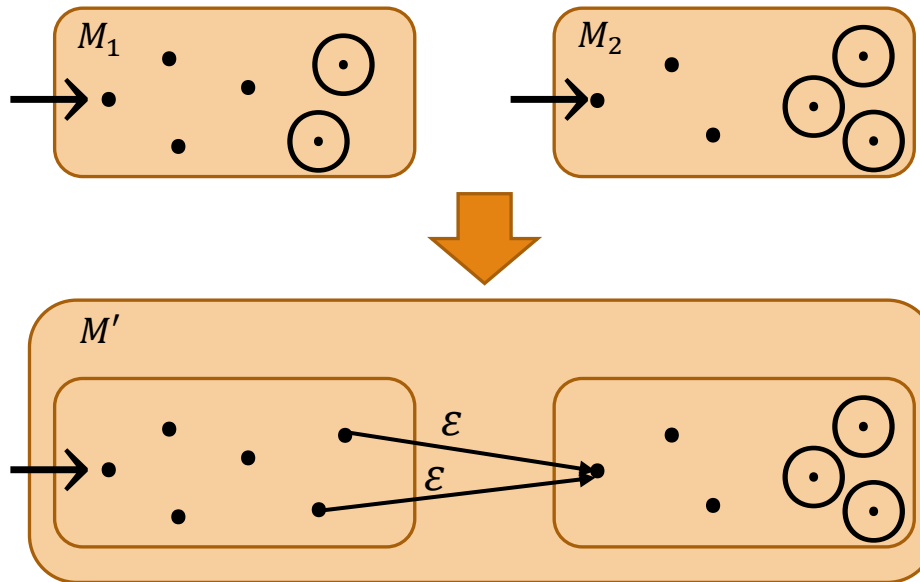


A felismerhető nyelvek zártsági tulajdonságai II.

A felismerhető nyelvek zártak a konkatenációra: Ha L_1, L_2 felismerhetők, akkor $L_1 L_2$ is felismerhető

- Legyen $M_i = (Q_i, \Sigma, \delta_i, q_i, F_i)$ úgy hogy $L_i = L(M_i)$ és $Q_1 \cap Q_2 = \emptyset$ ($i = 1, 2$)
- Megadunk egy M' -t melyre $L(M') = L_1 L_2$
- Ötlet:



$M' = (Q_1 \cup Q_2, \Sigma, \delta, q_1, F_2)$, ahol

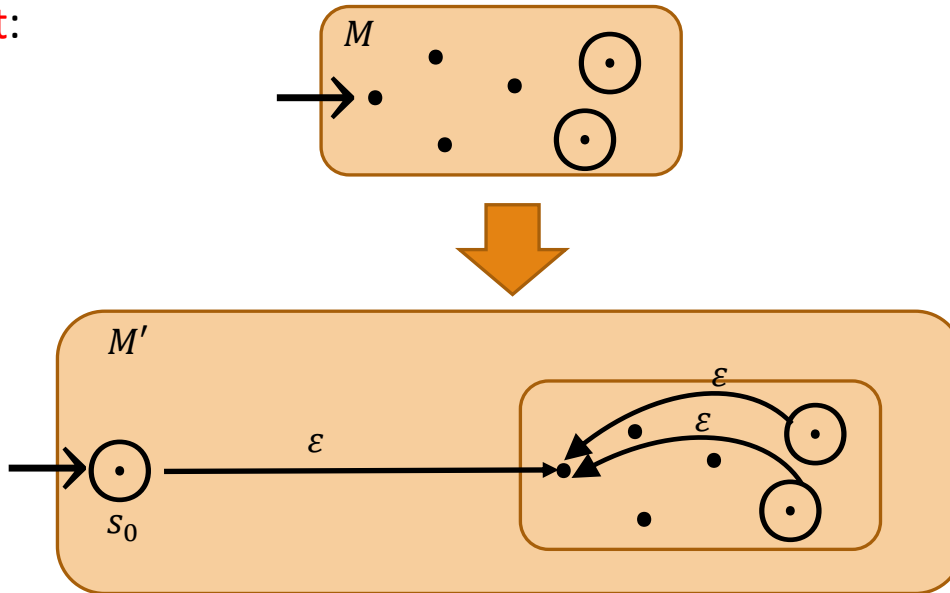
$$\delta(q, a) = \begin{cases} \delta_1(q, a) & q \in Q_1 - F_1 \\ \delta_1(q, a) & q \in F_1, a \neq \varepsilon \\ \delta_1(q, a) \cup \{q_2\} & q \in F_1, a = \varepsilon \\ \delta_2(q, a) & q \in Q_2 \end{cases}$$

A felismerhető nyelvek zártsági tulajdonságai II.

A felismerhető nyelvek zártak a Kleene-féle iterációra: Ha L felismerhető, akkor L^* is felismerhető

Bizonyítás

- Legyen $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ úgy hogy $L = L(M)$
- Megadunk egy M' -t melyre $L(M') = L^*$
- **Ötlet:**



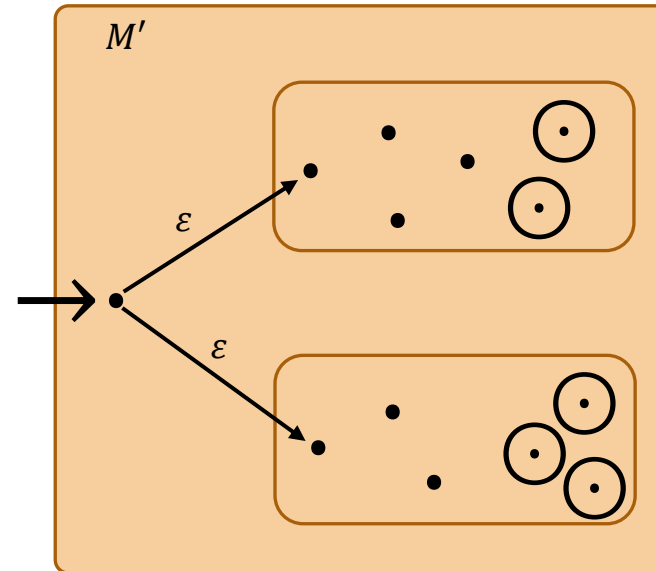
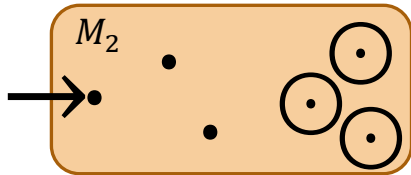
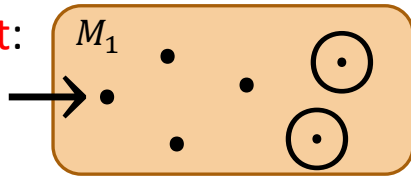
$M' = (Q \cup \{s_0\}, \Sigma, \delta', s_0, F \cup \{s_0\})$, ahol

$$\delta'(q, a) = \begin{cases} \delta(q, a) & q \in Q, q \notin F \\ \delta(q, a) & q \in F, a \neq \epsilon \\ \delta(q, a) \cup \{q_0\} & q \in F, a = \epsilon \\ q_0 & q = s_0, a = \epsilon \\ \emptyset & q = s_0, a \neq \epsilon \end{cases}$$

A felismerhető nyelvek zártsági tulajdonságai II.

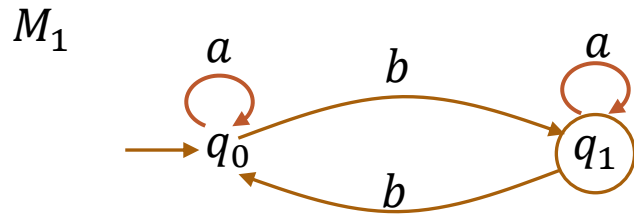
Nemdeterminisztikus automatákkal az egyesítésre való zártság könnyeben is bizonyítható:

- **Ötlet:**



- Ekkor $L(M') = L(M_1) \cup L(M_2)$

A metszetre való zártság – korábbi példa újra

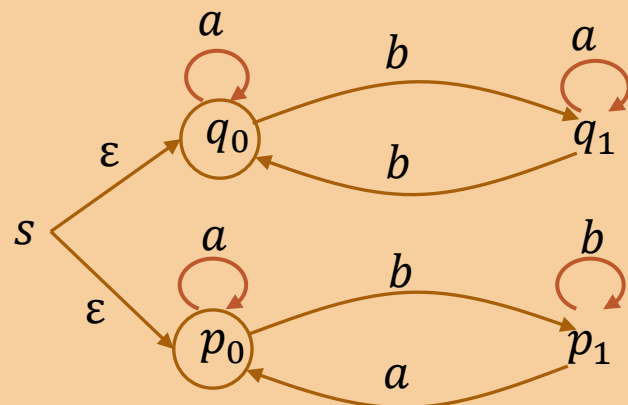


$$L(M_1) = \{u \in \{a, b\}^* \mid |u|_b \text{ páratlan}\}$$

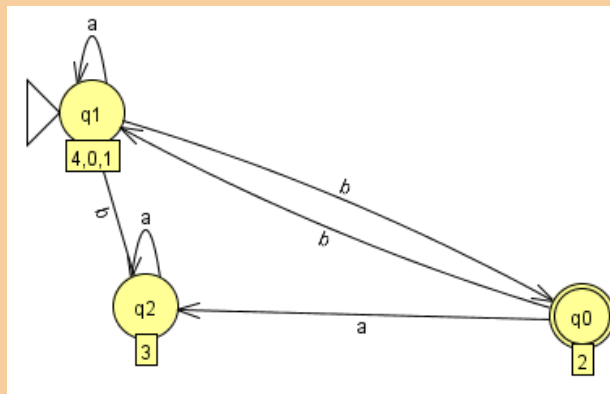
Adjunk véges automatát, ami az $L(M_1) \cap L(M_2) = \{u \in \{a, b\}^* \mid |u|_b \text{ páratlan és } u \text{ } b\text{-re végződik}\}$ nyelvet ismeri fel!

Használjuk fel, hogy $L(M_1) \cap L(M_2) = \overline{\overline{L(M_1)} \cup \overline{L(M_2)}}$

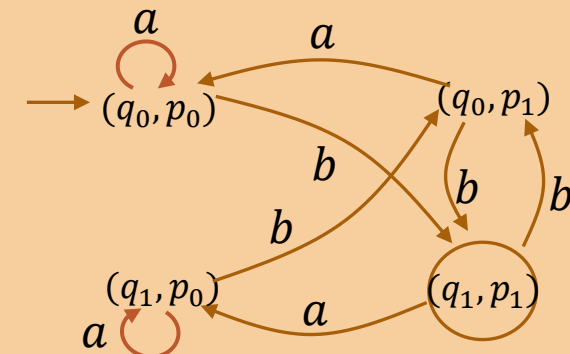
A komplementerek unióját felismerő NVA:



Ez determinizálva, minimalizálva, komplementálva (JFLAP):



És amit a második előadáson kaptunk (nem minimális, (q_0, p_0) és (q_0, p_1) összevonható):



Kleene tétele

A felismerhető nyelvek megegyeznek a reguláris nyelvekkel

Emlékeztető:

- felismerhető egy nyelv, ha DVA-val felismerhető
- reguláris egy nyelv, ha jelölhető reguláris kifejezéssel

Reguláris kifejezésből DVA

Legyen R egy L nyelvet jelölő reguláris kifejezés

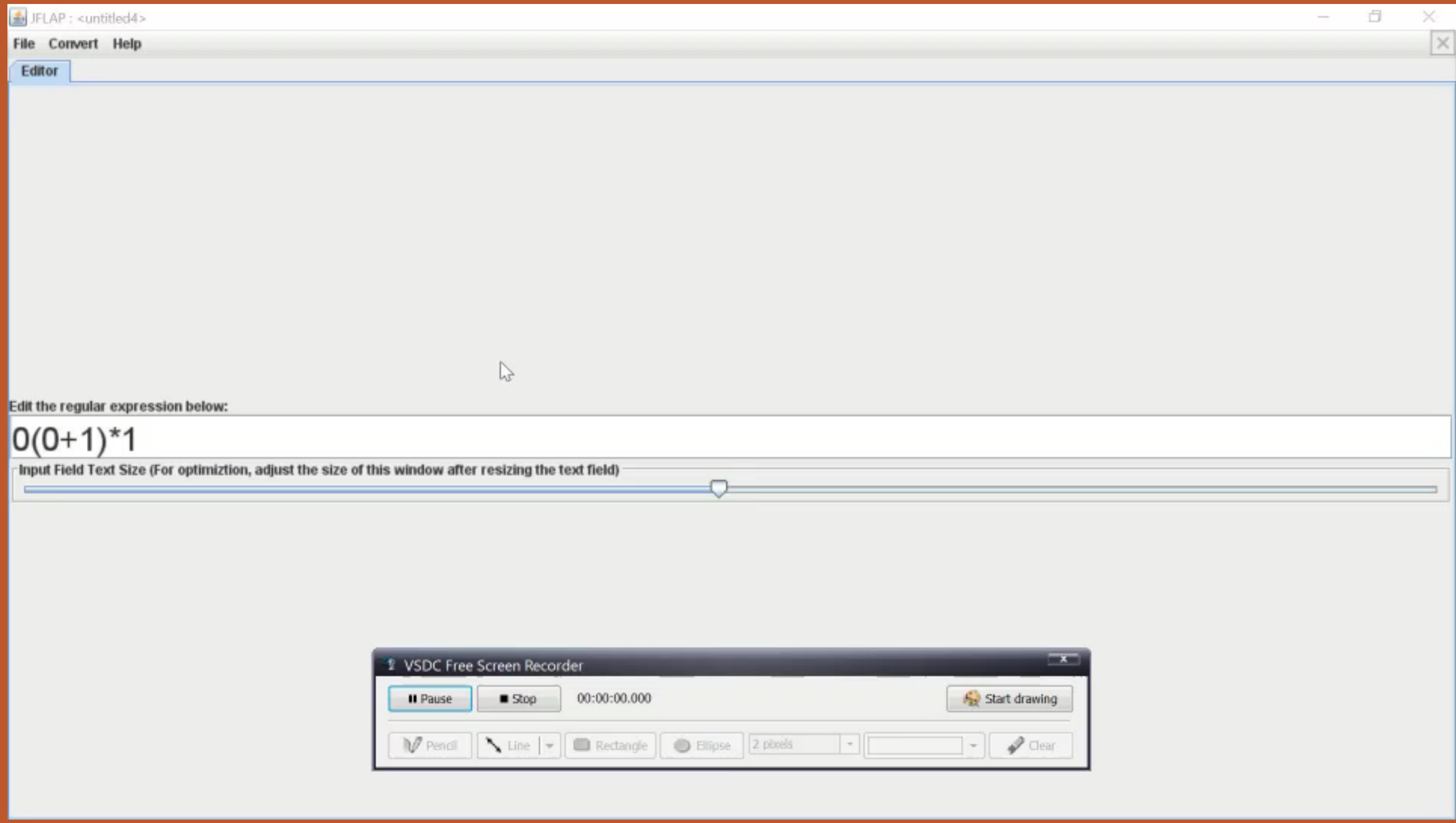
R felépítése szerinti indukcióval belátható, hogy L egy felismerhető nyelv

Ha R a **legegyszerűbb** reguláris kifejezések egyike, egy betű vagy \emptyset , akkor könnyen adható megfelelő automata:

- Egy **a betűt** (és csak azt) felismerő DVA: $\rightarrow \cdot \xrightarrow{a} \odot$
- Az **üres nyelv** felismerhető tetszőleges olyan DVA-val, aminek nincs végállapota

Ha R egy **összetett** reguláris kifejezés, akkor szétbonthatjuk egyszerűbbekre és feltehetjük, hogy az egyszerűbbekhez már vannak megfelelő NVA-k

Ezekből az NVA-kból, ahogyan azt a **felismerhető nyelvek zártsági tulajdonságainál** láttuk, megkonstruálható egy L -et felismerő NVA, amiből pedig megadható egy L -et felismerő DVA is



Kleene tétele – NVA-ból reguláris kifejezés

Legyen M egy NVA, megadunk egy olyan R reguláris kifejezést, ami $L(M)$ -et jelöli

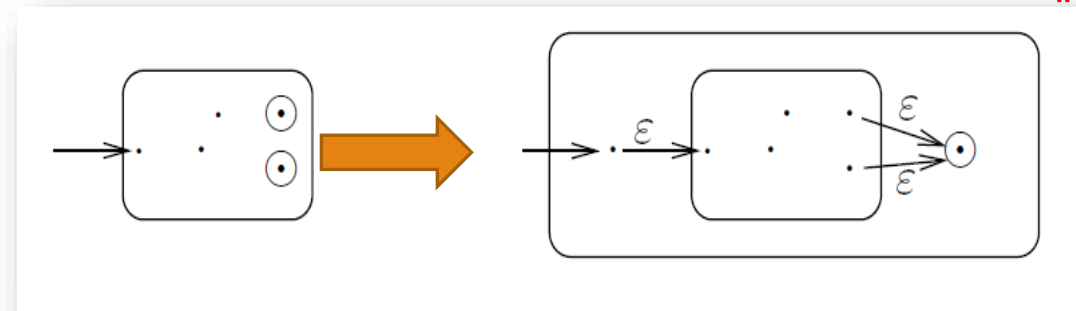
Feltehetjük, hogy M a következő alakú:

- pontosan egy végállapota van,
- a végállapotból nem indul átmenet,
- A kezdőállapotba nem vezet átmenet,
- a kezdőállapot különbözik a végállapottól
- (a többi állapotot **belső állapotnak** nevezzük)

Továbbá általánosítjuk az NVA-t:

- bármely két belső állapot között pontosan egy él van és
- minden él egy reguláris kifejezéssel van címkézve
- (a példákban nem tüntetjük majd fel az üreshalmazzal címkézett éleket)

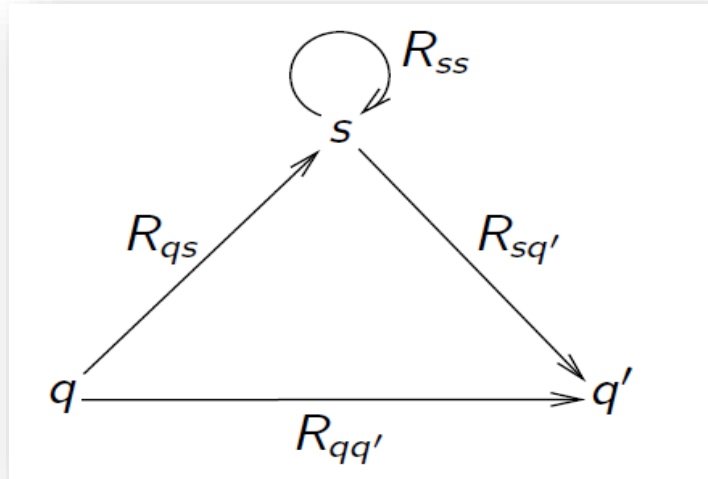
Megjegyzés: ha egy ilyen NVA-nak nincs belső állapota, akkor a kezdő és végállapot közötti él olyan reguláris kifejezéssel van címkézve ami az NVA által felismert nyelvet jelöli



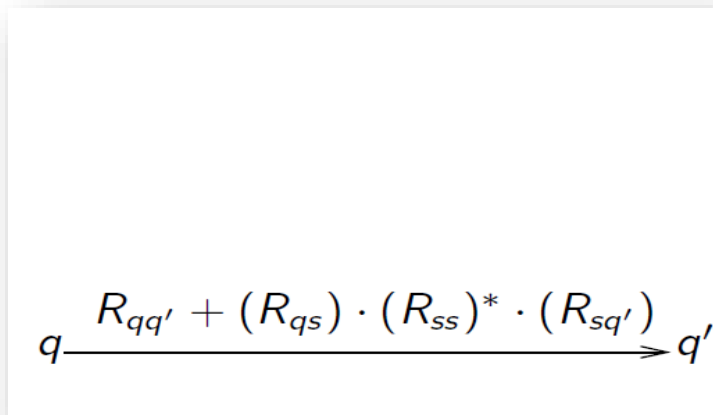
Kleene tétele – NVA-ból reguláris kifejezés

Amíg az NVA-nak van belső csúcsa, csináljuk a következőt:

- Legyen s egy belső csúcs és q, q', s egy „háromszög” az átmeneti gráfban:

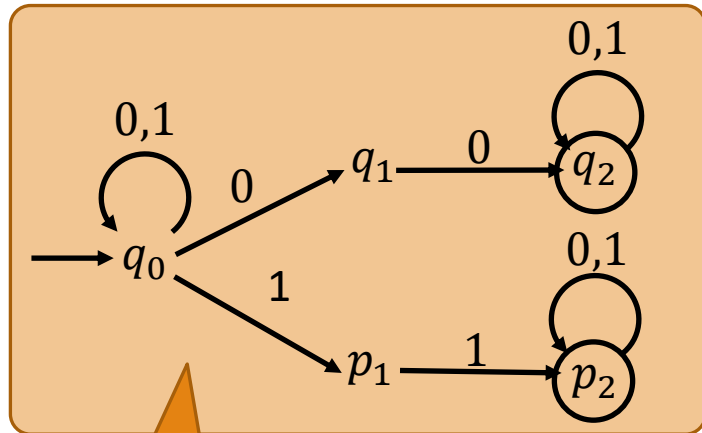


- Az $q \longrightarrow q'$ átmenet címkejét $R_{qq'}$ -ről változtassuk $R_{qq'} + (R_{qs}) \cdot (R_{ss})^* \cdot (R_{sq'})$ -re:

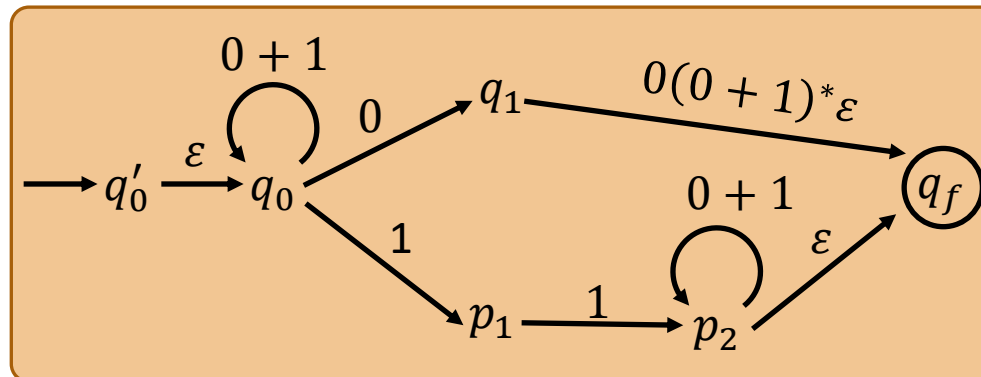
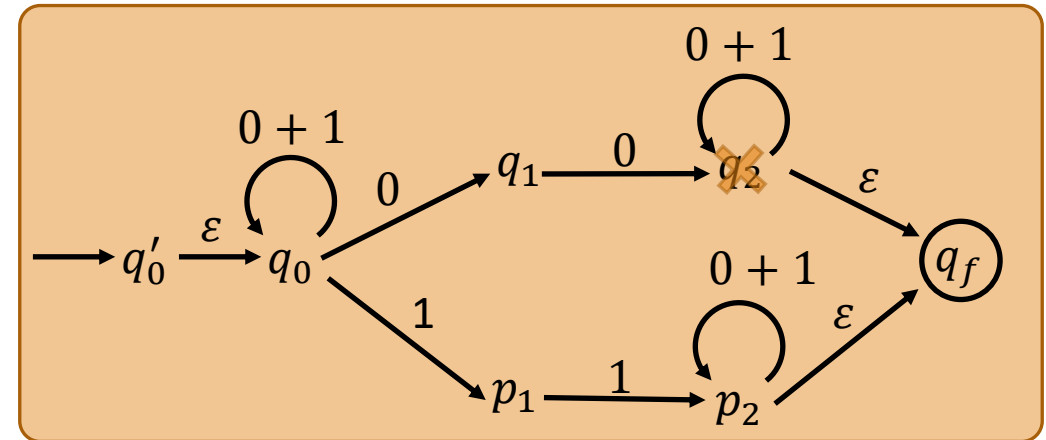


- Amikor ezt minden ilyen háromszögre megcsináltuk, hagyjuk el az s csúcsot
- Belátható, hogy a kapott új NVA ugyanazt a nyelvet ismeri fel, mint a korábbi
- Ezt addig iteráljuk, amíg a kapott NVA-nak már csak kezdő és végállapota van
- Az ezek között átmenet címkeje egy olyan reguláris kifejezés, ami $L(M)$ -et jelöli

NVA-ból reguláris kifejezés – Példa

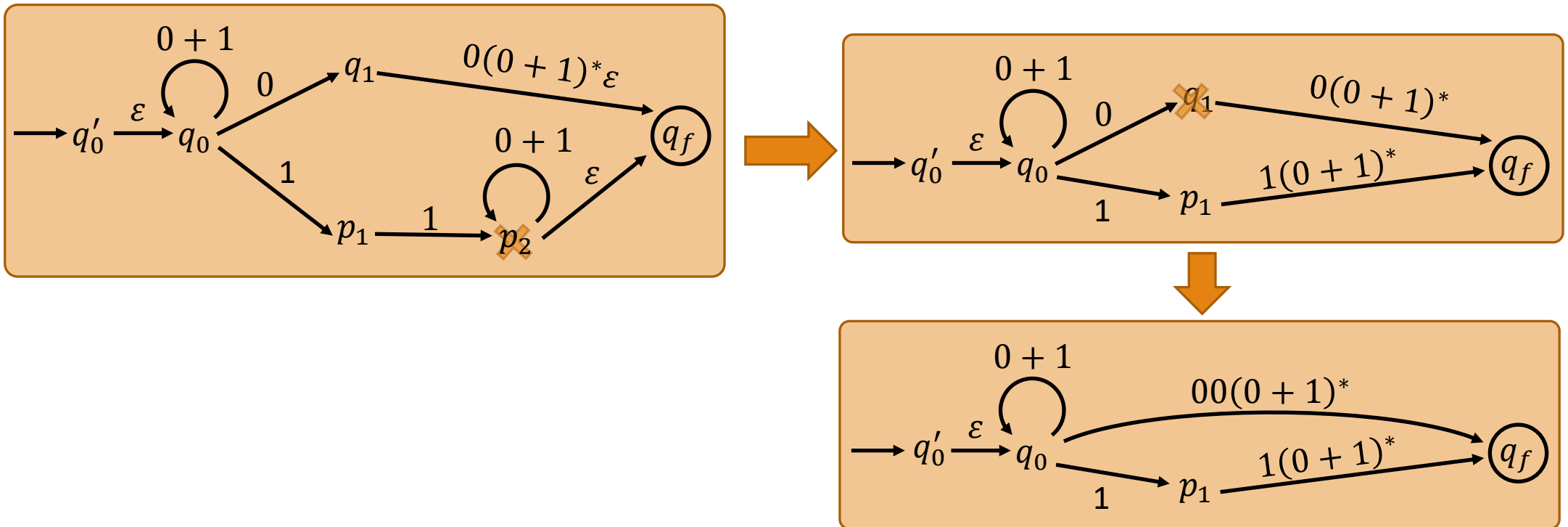


A felismert nyelv: azon $\{0,1\}$ -feletti szavak, melyekben előfordul a 00 vagy 11 részszó



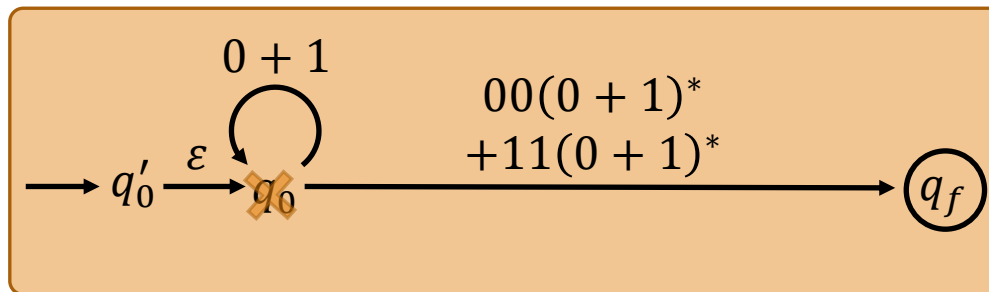
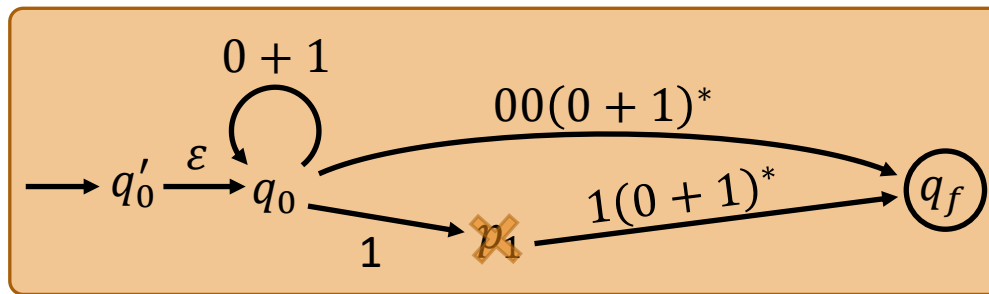
(folyt. köv.)

NVA-ból reguláris kifejezés – Példa



(folyt. köv.)

NVA-ból reguláris kifejezés – Példa



$$\rightarrow q'_0 \xrightarrow{(0+1)^*(00(0+1)^* + 11(0+1)^*)} q_f$$

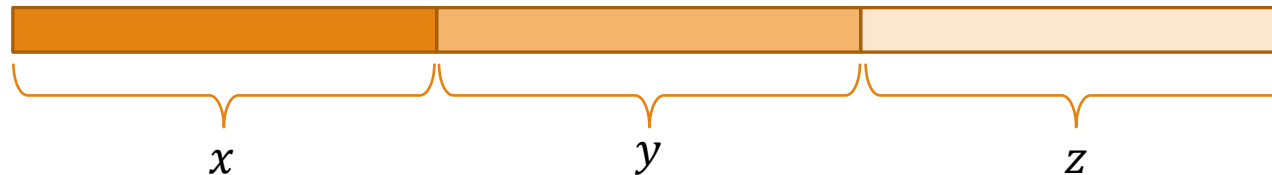
Egy reguláris kifejezés, ami pont az eredeti NVA által felismert nyelvet jelöli (azon szavak, melyekben előfordul a 00 vagy 11 részszó)

A felismerhető nyelvek korlátai

Ha egy M véges automatának egy „elég hosszú” u szót adunk bemenetként, akkor az M -nek az u -n való futásán biztosan szerepelni fog valamelyik állapot legalább kétszer

A pumpáló lemma

Legyen $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ egy L nyelvet felismerő DVA és legyen p az M állapotainak száma. Legyen u egy olyan legalább p hosszú szó, amit M elfogad. Ekkor u felírható



alakban úgy, hogy a következő teljesül:

1. y hossza legalább 1
2. xy hossza legfeljebb p
3. $xy^i z \in L$ minden $i \geq 0$ számra

A felismerhető nyelvek korlátai

Bizonyítás

Vegyük az M sikeres futását az u -n:

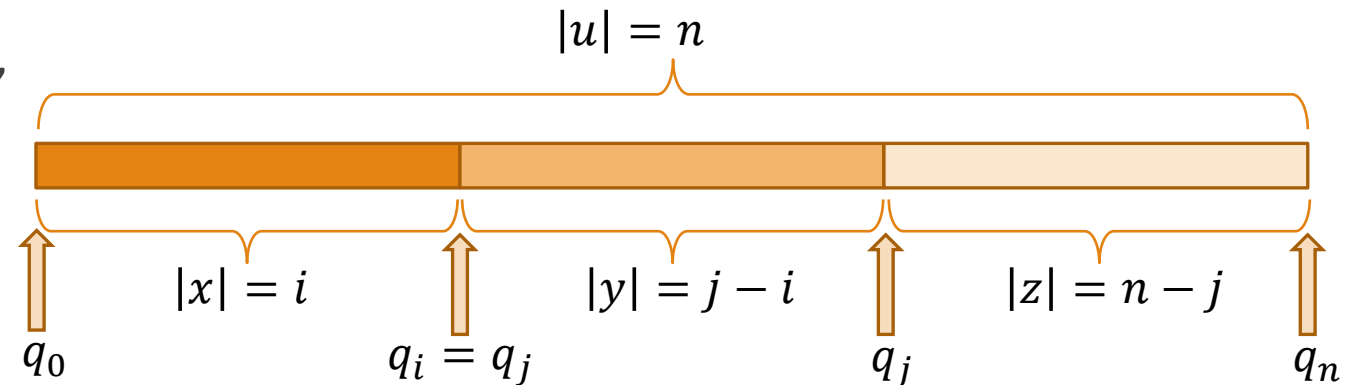
$$q_0 \xrightarrow{a_1} q_1 \xrightarrow{a_2} q_2 \dots q_{n-1} \xrightarrow{a_n} q_n \quad (q_n \in F, a_1 \dots a_n = u, a_i \in \Sigma, n \geq p)$$

Legyen q_j az első olyan állapot, ami volt már korábban, azaz van olyan $i < j$, hogy $q_i = q_j$

Legyen x az u i -hosszú prefixe

y az x -et követő $j - i$ hosszú részszó,

és z az u $n - j$ hosszú szuffixuma:



Ekkor az $u = xyz$ felbontásra teljesül mindhárom állítás

Az $L = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$ nyelv nem felismerhető

Hogyan lehet ezt megmutatni?

Tegyük fel, hogy egy M DVA mégis felismeri L -et, és legyen p az M állapotainak száma

Legyen $u = a^p b^p$, ezen M -nek van sikeres futása

Mivel $|u| \geq p$, u -nak van egy ilyen felbontása:

Legyen u' a következő szó:

$aaaaa \dots aaa \dots aaaaa bbbbb \dots bbbbb$

$x \quad y, |y| > 1$
 $aaaaa \dots aaaaa bbbbb \dots bbbbb$
 $xy, |xy| \leq p \quad z$

Legalább
1 db a

Csak a
betű lehet
benne

Azt tanultuk, hogy u' -t is fel kellene ismernie M -nek, de abban több a van mint b !

Hol a hiba? Hát ott, hogy feltettük, hogy M L -et ismeri fel

Tehát L nem felismerhető!

A VA-k kimenettel

Mealy automata: (A, B, O, t, f, k)

- A, B, t, k ugyanaz, mint DVA-knál: A – állapotok véges, nem üres halmaza, B – bemenő jelek ábécéje, t – átmeneti függvény, k - kezdőállapot
- O : kimenő jelek ábécéje
- $f: A \times B \rightarrow O$, a **kimeneti függvény**
- Ha $t(q, a) = p$ és $f(q, a) = b$, q, p állapotok, a bemenő jel, b pedig egy kimenő jel, akkor

$$q \xrightarrow{a/b} p$$

- az **M egy átmenete**
- Az átmenetek alapján t és f egyértelműen leírható az **átmeneti–kimeneti diagrammal**
 - csúcsai: állapotok, élei: átmenetek
- M megadása az átmeneti–kimeneti diagrammal: megjelöljük a gráfban a kezdőállapotot

A VA-k kimenettel

M egy futása egy $u = a_1 \dots a_n$ ($a_i \in B$) szón átmenetek egy

$$q_1 \xrightarrow{a_1/f(q_1,a_1)} q_2 \xrightarrow{a_2/f(q_2,a_2)} q_3 \dots q_n \xrightarrow{a_n/f(q_n,a_n)} q_{n+1} \text{ sorozata, ahol } q_1 = k$$

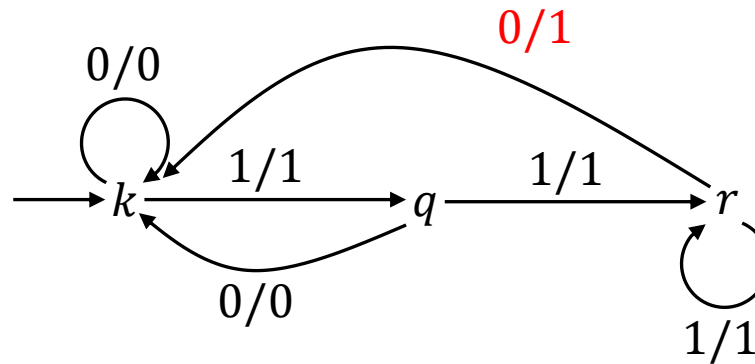
- **Megjegyzés:** M -nek pontosan egy futása van u -n
- f **kiterjesztése** u -ra: $f(u) = f(q_1, a_1)f(q_2, a_2) \dots f(q_n, a_n)$

Az M által meghatározott **számítás:**

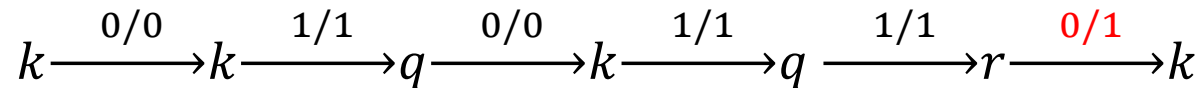
egy $F_M: B^* \rightarrow O^*$ függvény, melyre $F_M(u) = f(u)$, minden $u \in B^*$ esetén

Mealy automata – Példa

Mealy automata, ami minden olyan 0-t ami közvetlenül 11 után jön átír 1-re:



M futása a 010110 szón:



$$F_M(01011\mathbf{0}) = 010111$$

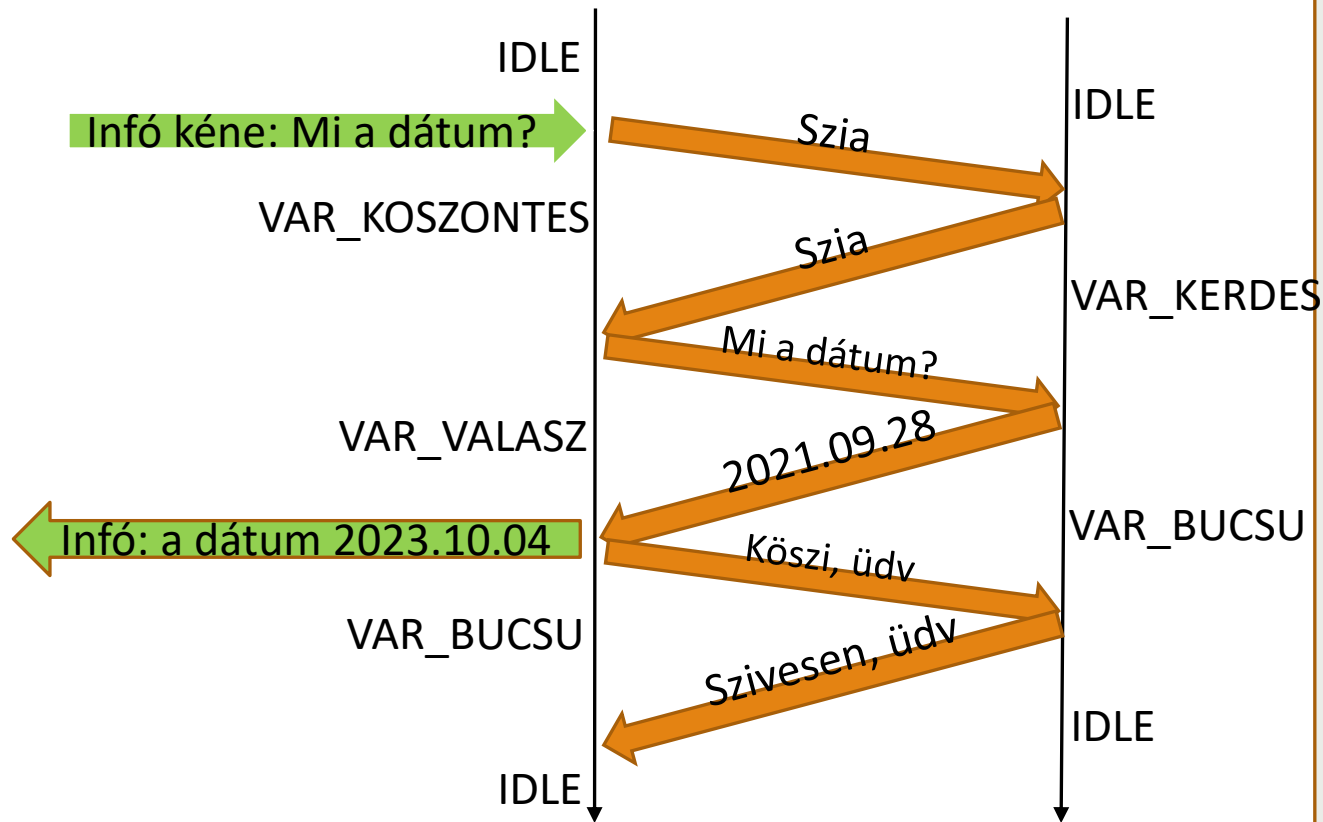
$$F_M(11001110) = 11\mathbf{1}01111$$

- Egy $M=(A, B, O, t, f, k)$ Mealy automata kimeneti függvénye általánosítható a következőképpen:
 - $f: A \times B \rightarrow O^*$
 - azaz tetszőleges q állapotra és b bemenetre $f(q, b)$ értéke egy O feletti szó

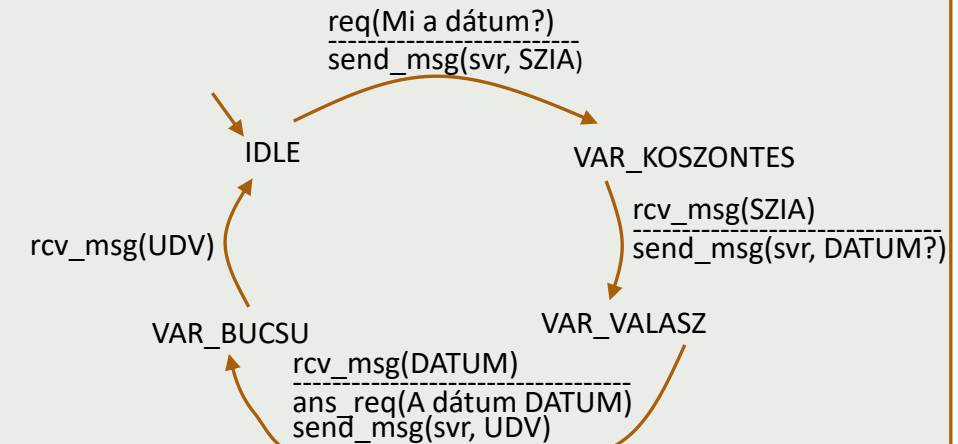
Protokoll megadása Mealy automatával – Példa

Egy fiktív, ember-ember közötti kommunikációs protokollt adunk meg

A kapcsolat kialakításának menete:



Kliens állapotdiagram:



Server állapotdiagram:

