

Orákulumos Turing-gépek

Korábban láttuk, hogy $NP \cup coNP \subseteq \mathbf{PMC}_{\mathcal{AM}}$

- De vajon legfeljebb milyen bonyolultságú problémák dönthetők el az aktív membrános P rendszerekkel?
- Ahhoz, hogy ez megmutassuk, bevezetjük az **orákulumos Turing-gépet**:
 - Legyen A egy nyelv; egy **A -orákulumos M^A Turing-gép** egy olyan (akár nemdeterminisztikus) Turing-gép, melynek van
 - egy **kérdés szalagja** és **$q^?$, q_{igen} , q_{nem}** állapotai (ezek függetlenek a q_i, q_n állapotoktól)
 - M^A amíg nem a $q^?$ állapotban van, addig úgy viselkedik, mint egy hagyományos Turing-gép
 - Ha M^A a $q^?$ állapotba lép, akkor
 - Felteszi azt a kérdést az orákulumnak, hogy „**a kérdés szalagon lévő szó benne van-e az A nyelvben?**”
 - Attól függően, hogy erre a kérdésre mi a válasz, M^A a q_{igen} vagy q_{nem} állapotban folytatja a számítását

Az aktív membrános P rendszerek számítási ereje

- M^A időbonyolultsága: ugyanaz, mint a klasszikus Turing-gép esetén
 - az órakulum válasza egy lépésnek számít!
- **MSAT probléma**: adott egy F ítéletkalkulusbeli formula. A kérdés az, hogy F igaz-e a lehetséges interpretációk **több mint a felében?**
- P^{MSAT} olyan problémák, melyek eldönthetők polinom idejű determinisztikus MSAT-órakulumos Turing-géppel
 - $P^{MSAT} = P^{PP}$, ahol PP az a bonyolultsági osztály, melyben MSAT teljes problémának számít
- **Tétel**: $PMC_{\mathcal{AM}} = P^{PP}$

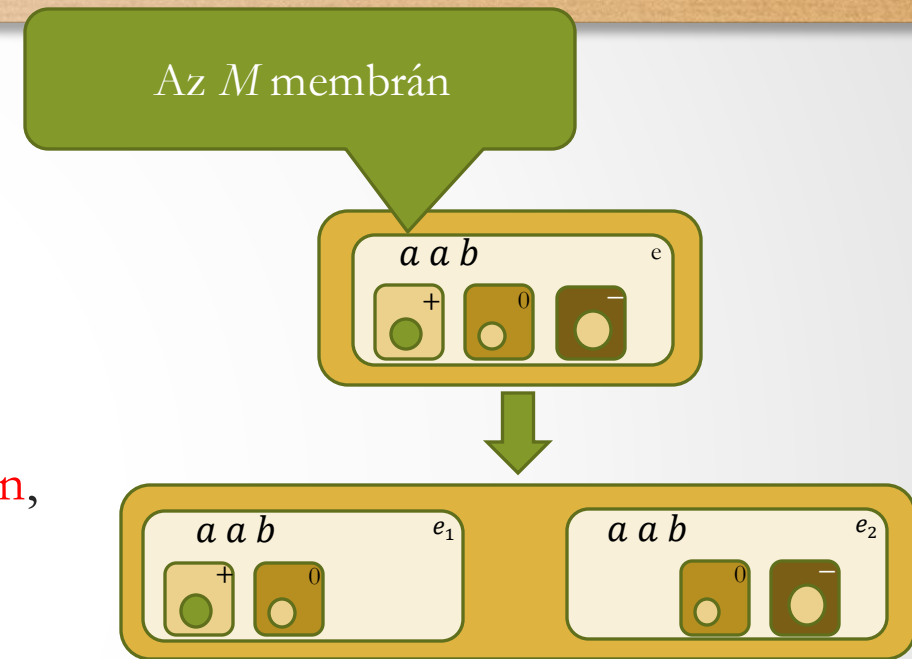
Aktív membrános P rendszerek számítási ereje

- Ismert, hogy $NP \subseteq P^{PP} \subseteq PSPACE \subseteq EXPTIME$
 - Az a sejtés, hogy mindegyik tartalmazás valódi
- Emlékeztető: a **QBF probléma**
 - Adott egy φ kvantifikált, zárt Boole formula
 - Azt kell eldönteni, igaz-e φ
- QBF **PSPACE-teljes**: a legnehezebb problémák egyike a PSPACE osztályon belül, nehezebb mint az MSAT (sejtés)
- Következik, hogy **QBF feltehetően nem oldható** meg hatékonyan aktív membrános P rendszerekkel

Emlékeztető: PSPACE polinom tárigényű determinisztikus (vagy nemdeterminisztikus) Turing-géppel eldönthető problémák osztálya

Nem elemi membrán osztás

- **Nem elemi membrán osztó** szabály (*ndiv*)
 - $$[[]_{h_1}^+ []_{h_2}^-]_h^e \rightarrow [[]_{h_1}^+]_h^{e_1} [[]_{h_2}^-]_h^{e_2}$$
 - Akkor alkalmazható egy M membránra ha M -nek van **két ellentétes polarizációjú** gyermeke
 - A szabály alkalmazása során **M -ből keletkezik két új membrán**, **egyikbe** az eredetileg **pozitív**, **másikba a negatív** membránok kerülnek; **a semlegesek duplikálódnak** és mindkét új membránba bekerülnek
 - Az M -et határoló régióban lévő **objektumok is duplikálódnak** és rendre a két új membránba kerülnek

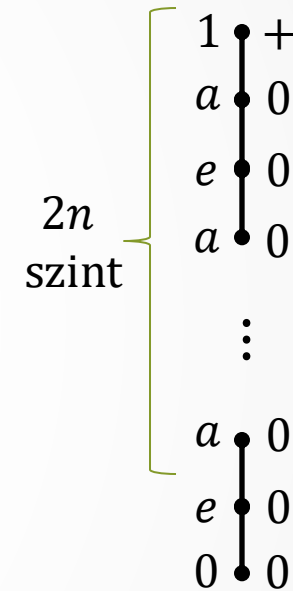


PSPACE-teljesség nem elemi osztással

Aktív membrános
rendszerekkel nem
elemi osztással polinom
időben megoldható
problémák osztálya

- **Tétel:** $\text{PSPACE} = \text{PMC}_{\mathcal{AM}+n\text{div}}$
- A $\text{PSPACE} \subseteq \text{PMC}_{\mathcal{AM}+n\text{div}}$ belátásához elegendő megoldani a **QBF problémát** ilyen rendszerekkel
- Az átláthatóság kedvéért a membránstruktúrát irányított véges **fákkal** adjuk meg
 - Az élek a gyökér felé mutatnak
 - Egy a -ból b -be mutató él azt jelenti, hogy az a címkéjű membrán egy b címkéjű membránban van (közvetlenül) beágyazva
- Az **alapötlet** leírása
 - Legyen $F = \exists p_1 \forall p_2 \dots \exists p_{2n-1} \forall p_{2n} (C_1 \wedge \dots \wedge C_m)$
 - Az **F elkódolása** ugyanúgy megy, mint a SAT megoldása esetében

- A **kezdeti** membránstruktúra:

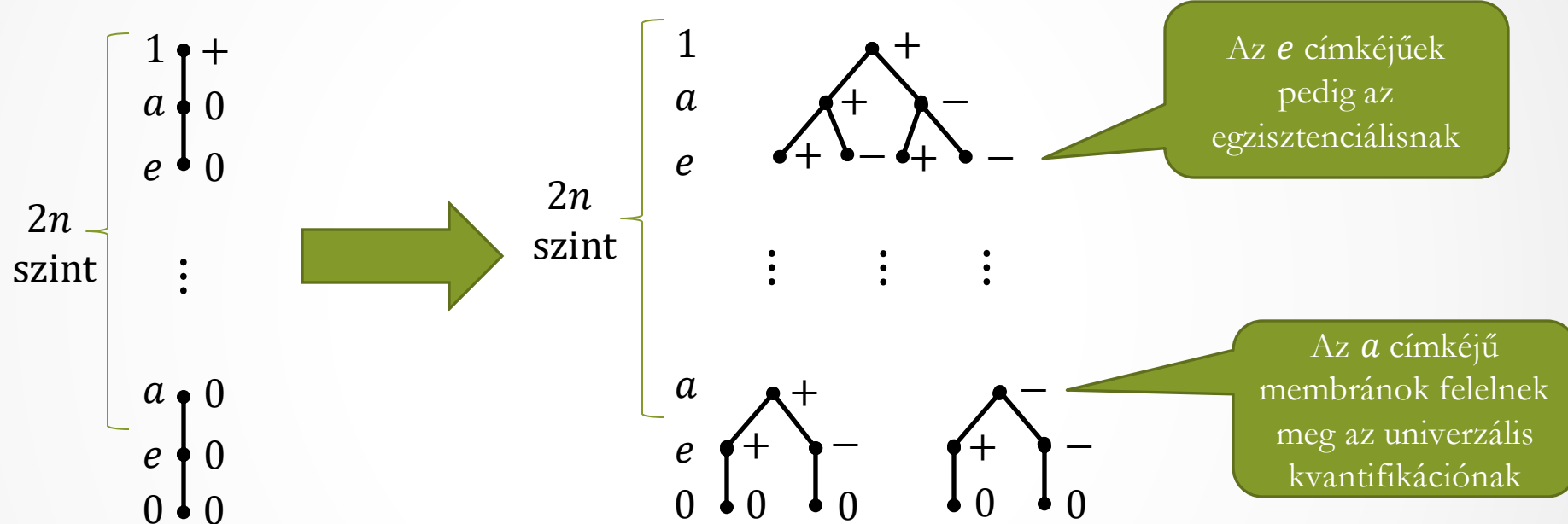


membrán
címkék

polarizációk

QBF megoldása nem elemi osztással

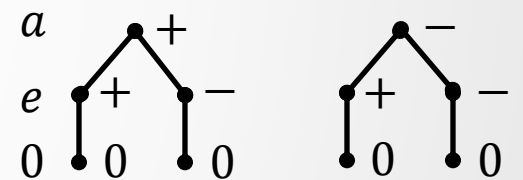
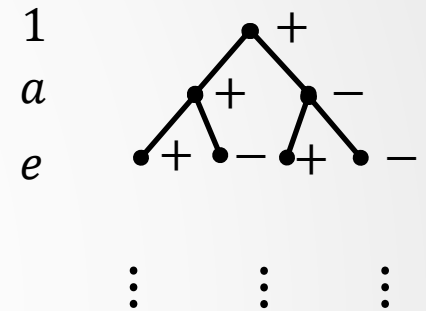
- n lépésben létrehozuk a kezdőből következő (jobb oldalon lévő) membránstruktúrát:



- Ekkor a 0 -s membránból 2^{2n} darab van, a $2n$ változó egy-egy interpretációjával

QBF megoldása nem elemi osztással

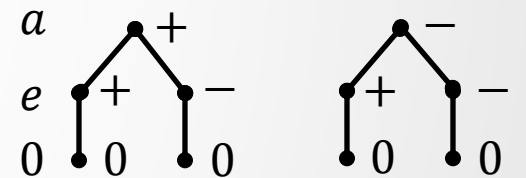
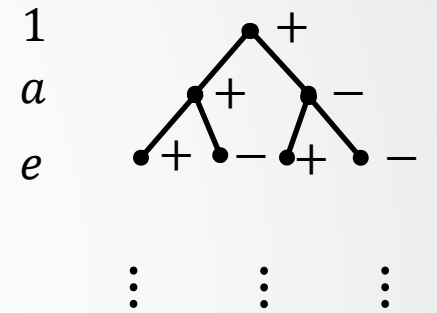
- Minden 0-s membrán tartalmazza **azokat a klózatokat**, melyeket az a megfelelő **interpretáció kielégít**
 - Hasonlóan ahhoz ahogy a SAT megoldásánál láttuk
- Azok a 0-s membránok, melyek az **összes klózt** tartalmazzák **kiküldenek a szülőbe egy t -t**
- Az e -s membránok egyszerűen **tovább küldik** a szülőbe a t -t
- Az a -s membránokban **2 t kell ahhoz, hogy 1 továbbmentjen**
 - az első t átállítja a polarizációt: $[t]_a^{+/-} \rightarrow []_a^0 s$
 - ha van egy másik t , az továbbmegy a szülőbe



s egy dummy szimbólum, később nem használjuk

QBF megoldása nem elemi osztással

- Ha az 1-es membránba érkezik egy t , akkor az azt jelenti, hogy F igaz
- Ennek megfelelően az $[t]_1^+ \rightarrow []_1^0$ yes kiküld a környezetbe egy yes-t
 - Közben az 1-es polarizációja 0 lesz
- A számítás alatt az 1-es membránban az f_0, f_1, \dots, f_k (k egy megfelelő n -től és m -től függő szám) objektumok számolják a lépéseket
- Ha az 1-es nem lesz időben 0 polaritású, akkor az $[f_k]_1^+ \rightarrow []_1^+$ no a környezetbe küldi a no-t
 - Helyesen, hiszen ekkor F hamis



Kapjuk, hogy $\text{PSPACE} \subseteq \text{PMC}_{\mathcal{AM}_{+n\text{div}}}$

PSPACE felső korlát

- Legyen Π egy tetszőleges polinom idejű aktív membrános felismerő P rendszer (nem elemi osztás is megengedett)
- Π egy C számítása egy adott bemeneten szimulálható egy **polinom tárigényű A algoritmussal**:
 - Először hozzárendelünk a C összes konfigurációjának összes membránjához egy polinom méretű egyedi címkét
 - A nem tárolhatja Π C -beli konfigurációit explicit módon, mert ezek akár **exponenciális méretűek** is lehetnek
 - Ehelyett A a következőt teszi:
 - Amikor szüksége van egy K konfiguráció egy i címkéjű M membránjának a tartalmára
 - legyen K' a K -t megelőző C -beli konfiguráció
 - A i -ből kiszámolja azon membránok i_1, \dots, i_n címkéit, melyek hatással vannak a $K' \Rightarrow K$ lépés során M -re
 - rekurzív módon kiszámolja az i_1, \dots, i_n címkéjű membránok tartalmait
 - és ezek segítségével számolja ki a K tartalmát
- Kapjuk, hogy **$\text{PMC}_{\mathcal{AM}_{+ndiv}} \subseteq \text{PSPACE}$** , amiből következik, hogy **$\text{PMC}_{\mathcal{AM}_{+ndiv}} = \text{PSPACE}$**

Polarizáció nélküli aktív membrános P rendszerek számítási ereje

Ismert, hogy QBF megoldható **polarizáció nélkül is**, tehát

- $$\text{PSPACE} = \text{PMC}_{\mathcal{AM}_{+ndiv}} = \text{PMC}_{\mathcal{AM}^0_{+ndiv}}$$

Mi a helyzet akkor ha nem engedjük meg **sem a polarizációt, se a nem elemi membránok osztódását?**

- Gh. Paun sejtése (2005):** $P = \text{PMC}_{\mathcal{AM}^0}$

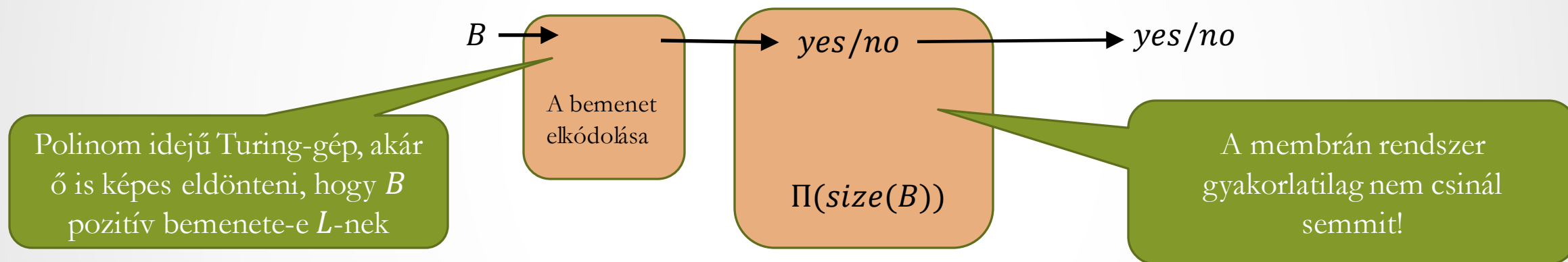
- Eddig csak **speciális esetekben** sikerült bizonyítani:
 - Ha az osztó szabály **szimmetrikus**: $[a]_h \rightarrow [b]_h[b]_h$, vagy
 - ha nem használható se **evolúciós szabály** se **kommunikációs szabály**, vagy
 - ha nem használható **membrán feloldó** szabály ← ezt majd be is látjuk...

Aktív membrános P rendszerekkel nem elemi membránosztással, de polarizáció nélkül, polinomidőben megoldható problémák osztálya

Aktív membrános P rendszerekkel polarizáció (és nem elemi osztás) nélkül polinomidőben megoldható problémák osztálya

Polarizáció nélküli aktív membrános P rendszerek számítási ereje

- Vegyünk egy P-beli L problémát és ennek egy B bemenetét
 - Annak eldöntése membrán rendszerrel, hogy B pozitív bemenet-e triviális:



- Ezért ha arra vagyunk kíváncsiak, hogy a P rendszer valójában milyen számítási kapacitással rendelkezik, akkor a polinomiálisnál **szigorúbb uniformitási feltételek** kellene

Szigorú uniformitási feltételek

- Egy $\Pi = \{\Pi(n) \mid n \geq 1\}$ felismerő P rendszer család ***L-uniform*** ha van olyan **logaritmikus táras determinisztikus** Turing-gép ami
 - 1^n -ből kiszámolja $\Pi(n)$ egy **leírását** és
 - a problémák bemeneteit kódoló szavakból kiszámolja az ezeknek megfelelő **objektum-multihalmazokat**
- **$L\text{-PMC}_R$** : Azon problémák, melyek eldönthetők **polinom időben** R -beli L -uniform membránrendszer családdal

Hasonló a definíció a polinomiálisan uniforméhoz, csak itt logtáras Turing-gép számol ki mindent (ami feltehetően gyengébb, mint a polinom idejű Turing-gép)

Polarizációmentes aktív membránok számítási ereje membrán feloldó szabályok nélkül

- Jelölje \mathcal{AM}_{-dis}^0 : azon aktív membrános P rendszerek osztályát, melyek **nem alkalmazhatnak membrán feloldást** és **nincs a membránoknak polaritása**
- Egy ilyen P rendszer **függőségi gráfja** egy olyan irányított gráf, ahol
 - a csúcsok (a, i) alakúak (a objektum, i membrán címke)
 - (a, i) -ből (a', i') -be **pontosan akkor van él**, ha van olyan szabály, aminek hatására egy i címkéjű membránban lévő a objektumból egy i' címkéjű membránban lévő a' objektum lesz
- **Tétel:** $L\text{-}PMC_{\mathcal{AM}_{-dis}^0} \subseteq NL$
- **Bizonyítás:**
 - A függőségi gráfban **kell keresni utat** (a, i) -ből (yes, i') -be, ahol i és i' rendre a bemeneti és kimeneti membrán, a -pedig egy tetszőleges objektum a bemeneti membránból
 - Irányított gráfban adott két csúcs közötti út keresése nemdeterminisztikus logtáras Turing-géppel megoldható

Emlékeztető: NL a nemdeterminisztikus logtáras
Turing-géppel megoldható problémák

Aktív membránok polarizációval és (elemi és nem elemi) membrán osztás nélkül

Jelölje \mathcal{AM}_{-div} azon aktív membrános P rendszerek osztályát, melyek nem alkalmazhatnak sem elemi, sem nem elemi membrán osztást

Tétel: $\mathbf{L-PMC}_{\mathcal{AM}_{-div}} = \mathbf{P}$

Bizonyítás (vázlat)

- **P felső korlát:** ha nincs membrán osztás, akkor a membránok száma végig polinom sok, és csak azt kell eltárolni, hogy melyik membránban milyen és mennyi objektum van
 - ez polinom sok biten eltárolható
 - így a rendszer egy lépésének az eredménye mindig kiszámítható **polinom időben**
- **P alsó korlát:** A Horn-formulák kielégíthetősége P-teljes probléma és megoldható membrán osztás nélkül

Emlékeztető: A Horn-formulák olyan KNF-ek, melyben minden klóz legfeljebb egy pozitív literált tartalmaz