

Geometriai transzformációk 2D-ben

Eltolás, forgatás, skálázás

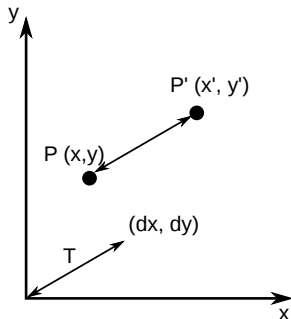
Transzformációk matematikai megadása

2D transzformációk kompozíciója

A Számítógépes grafikában használatos 2- és 3-dimenziós transzformációk:

- ▶ eltolás
- ▶ nagyítás, kicsinyítés (skálázás)
- ▶ forgatás

2D pont eltolása



$$x' = x + dx$$

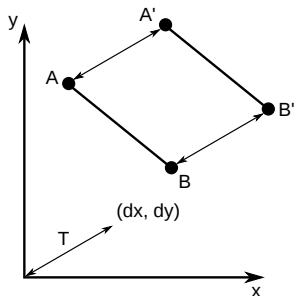
$$y' = y + dy$$

(oszlop-)vektorokkal:

$$P = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad P' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \quad T = \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}$$

$$P' = P + T$$

Elegendő az új végpontokat számolni



$$A' = A + T$$

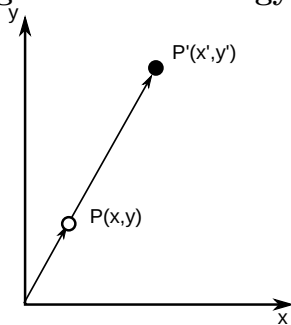
$$B' = B + T$$

2D nagyítás és kicsinyítés

A szögek változatlanok.

Szokták a kettőt együtt **SKÁLÁZÁSKÉNT** említeni. A nagyítást mindig origóból végezzük (vagy visszavezetjük origóból történő skálázásra.)

Origóból történő nagyítás



Általános

$$x' = x \cdot s_x$$

$$y' = y \cdot s_y$$

(oszlop-)vektorokkal

$$P = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad P' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \quad S = \begin{pmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{pmatrix}$$

$$P' = S \cdot P$$

2D forgatás

A hosszak és a szögek változatlanok

Origó körüli forgatás

ξ a forgatás szöge

$$x' = x \cdot \cos \xi - y \cdot \sin \xi$$

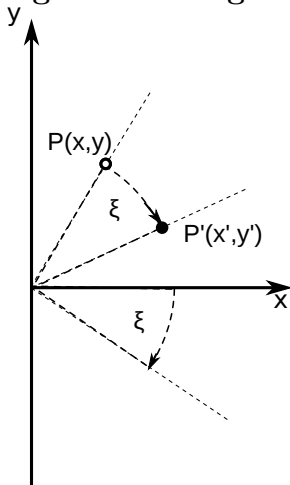
$$y' = y \cdot \sin \xi + x \cdot \cos \xi$$

$$P' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} \cos \xi & -\sin \xi \\ \sin \xi & \cos \xi \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$P' = R \cdot P$$



Homogén koordináták

Az (x, y) pont jelölése homogén koordinátákkal: (x, y, w)

Egyenlőség:

$(x, y, w) = (x', y', w')$, ha van olyan α , hogy :

$$x' = \alpha \cdot x, y' = \alpha \cdot y, \text{ és } w' = \alpha \cdot w$$

$$\text{pl.: } (2, 3, 6) = (4, 6, 12)$$

Egy ponthoz végtelen sok (x, y, w) tartozik.

Ha $w = 0$, akkor (x, y, w) végtelen távoli pont.

$(0, 0, 0)$ nem megengedett!

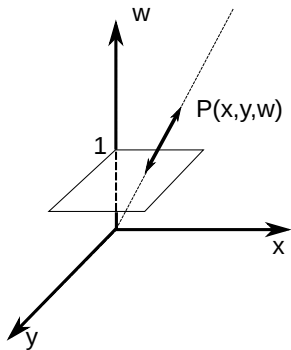
Kapcsolat a 2D és 3D között

$$(t \cdot x, t \cdot y, t \cdot w)$$

egyenes a 3D térben

$$\left(\frac{x}{w}, \frac{y}{w}, 1\right)$$

P vetülete a $w = 1$ síkon



A végtelen távoli pontok nincsenek a síkon.

2D eltolás matematikai megadása

$$P' = T(d_x, d_y)P,$$

ahol

$$T(d_x, d_y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & d_x \\ 0 & 1 & d_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & d_x \\ 0 & 1 & d_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ismételt eltolások:

$$P \xrightarrow{T(d_{x1}, d_{y1})} P' \xrightarrow{T(d_{x2}, d_{y2})} P''$$

$$P' = T(d_{x1}, d_{y1})P,$$

$$P'' = T(d_{x2}, d_{y2})P' = T(d_{x2}, d_{y2})(T(d_{x1}, d_{y1})P)$$

$$T(d_{x1}+d_{x2}, d_{y1}+d_{y2}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & d_{x1} \\ 0 & 1 & d_{y1} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & d_{x2} \\ 0 & 1 & d_{y2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & d_{x1} + d_{x2} \\ 0 & 1 & d_{y1} + d_{y2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2D skálázás matematikai megadása

$$P' = S(s_x, s_y)P,$$

ahol

$$S(s_x, s_y) = \begin{pmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ismételt skálázások:

$$P \xrightarrow{S(s_{x1}, s_{y1})} P' \xrightarrow{S(s_{x2}, s_{y2})} P''$$

$$P' = S(s_{x1}, s_{y1})P,$$

$$P'' = S(s_{x2}, s_{y2})P' = S(s_{x2}, s_{y2})(S(s_{x1}, s_{y1})P)$$

$$S(s_{x1} \cdot s_{x2}, s_{y1} \cdot s_{y2}) = \begin{pmatrix} s_{x1} & 0 & 0 \\ 0 & s_{x2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_{x2} & 0 & 0 \\ 0 & s_{y2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_{x1}s_{x2} & 0 & 0 \\ 0 & s_{y1}s_{y2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2D forgatás matematikai megadása

$$P' = R(\xi)P, \text{ ahol}$$

$$R(\xi) = \begin{pmatrix} \cos \xi & -\sin \xi & 0 \\ \sin \xi & \cos \xi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \xi & -\sin \xi & 0 \\ \sin \xi & \cos \xi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

($R(\xi)$ ortogonális)

Ismételt forgatások: $P \xrightarrow{R(\xi_1)} P' \xrightarrow{R(\xi_2)} P''$

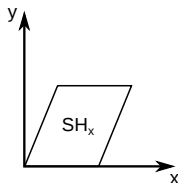
$$P' = R(\xi_1)P, \quad P'' = R(\xi_2)P' = R(\xi_2)(R(\xi_1)P)$$

$$\begin{aligned} R(\xi_1 + \xi_2) &= \begin{pmatrix} \cos \xi_1 & -\sin \xi_1 & 0 \\ \sin \xi_1 & \cos \xi_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \xi_2 & -\sin \xi_2 & 0 \\ \sin \xi_2 & \cos \xi_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\xi_1 + \xi_2) & -\sin(\xi_1 + \xi_2) & 0 \\ \sin(\xi_1 + \xi_2) & \cos(\xi_1 + \xi_2) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

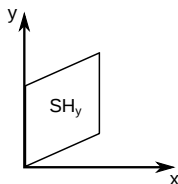
2D nyírás

A hosszak és a szögek változhatnak.

Párhuzamos egyenesek képe párhuzamos.



$$SH_x = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



$$SH_y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + a \cdot y \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

Affin transzformáció: eltolások, skálázások, forgatások és nyírások tetszőleges számú és sorrendű egymás utáni alkalmazásával kapott transzformáció

2D transzformációk kompozíciója – 1. példa

Forgatás ξ -val egy tetszőleges $P(x, y)$ pont körül.

- a) eltolás P -ből az origóba $T(-x, -y)$
- b) forgatás az origó körül $R(\xi)$
- c) eltolás az origóból P -be $T(x, y)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \xi & -\sin \xi & 0 \\ \sin \xi & \cos \xi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -x \\ 0 & 1 & -y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} \cos \xi & -\sin \xi & x(1 - \cos \xi) + y \sin \xi \\ \sin \xi & \cos \xi & y(1 - \cos \xi) - x \sin \xi \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2D transzformációk kompozíciója – 2. példa

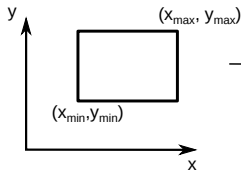
Nagyítás egy tetszőleges $P(x, y)$ pontból.

- a) eltolás P -ből az origóba $T(-x, -y)$
- b) nagyítás $S(s_x, s_y)$
- c) eltolás az origóból P -be $T(x, y)$

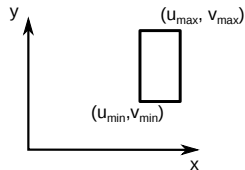
$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -x \\ 0 & 1 & -y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ & = \begin{pmatrix} s_x & 0 & x(1 - s_x) \\ 0 & s_y & y(1 - s_y) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Transzformációk dekompozíciója – 3. példa / 1

„Világ koordináta rendszer”



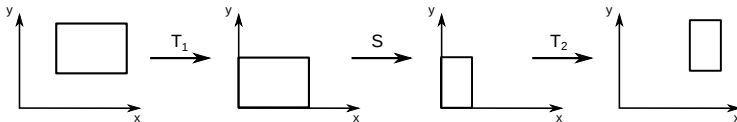
„Képernyő koordináta rendszer”



transzformáció

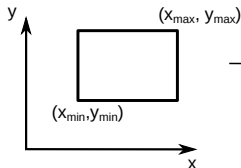
M

Lépések:

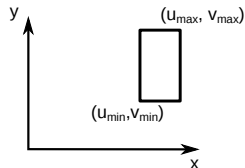


Transzformációk dekompozíciója – 3. példa / 2

„Világ koordináta rendszer”



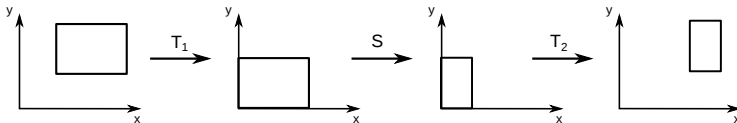
„Képernyő koordináta rendszer”



transzformáció

M

Lépések:



$$M = T(u_{\min}, v_{\min})S\left(\frac{u_{\max} - u_{\min}}{x_{\max} - x_{\min}}, \frac{v_{\max} - v_{\min}}{y_{\max} - y_{\min}}\right)T(-x_{\min}, -y_{\min}) =$$

Transzformációk dekompozíciója – 3. példa / 3

$$\begin{aligned} M &= T(u_{min}, v_{min}) S \left(\frac{u_{max} - u_{min}}{x_{max} - x_{min}}, \frac{v_{max} - v_{min}}{y_{max} - y_{min}} \right) T(-x_{min}, -y_{min}) = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & u_{min} \\ 0 & 1 & v_{min} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{u_{max} - u_{min}}{x_{max} - x_{min}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{v_{max} - v_{min}}{y_{max} - y_{min}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -x_{min} \\ 0 & 1 & -y_{min} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \frac{u_{max} - u_{min}}{x_{max} - x_{min}} & 0 & x_{min} \frac{u_{max} - u_{min}}{x_{max} - x_{min}} + u_{min} \\ 0 & \frac{v_{max} - v_{min}}{y_{max} - y_{min}} & y_{min} \frac{v_{max} - v_{min}}{y_{max} - y_{min}} + v_{min} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Transzformációk dekompozíciója – 3. példa / 4

$$M = \begin{pmatrix} \frac{u_{\max} - u_{\min}}{x_{\max} - x_{\min}} & 0 & x_{\min} \frac{u_{\max} - u_{\min}}{x_{\max} - x_{\min}} + u_{\min} \\ 0 & \frac{v_{\max} - v_{\min}}{y_{\max} - y_{\min}} & y_{\min} \frac{v_{\max} - v_{\min}}{y_{\max} - y_{\min}} + v_{\min} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

tehát

$$P' = MP(x, y, 1) = \begin{pmatrix} (x - x_{\min}) \frac{u_{\max} - u_{\min}}{x_{\max} - x_{\min}} + u_{\min} \\ (y - y_{\min}) \frac{v_{\max} - v_{\min}}{y_{\max} - y_{\min}} + v_{\min} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Általános kompozíció mátrix

Skálázások, forgatások nyírások és eltolások kompozíciója a legáltalánosabb esetben is

$$M = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

alakú mátrixot eredményez.

$$M = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Az $M \cdot P$ számításakor:

9 szorzás és 6 összeadás helyett elegendő

$$x' = x \cdot t_{11} + y \cdot t_{12} + t_{13}$$

$$y' = x \cdot t_{21} + y \cdot t_{22} + t_{23}$$

kiszámítása, ami csak 4 szorzás és 4 összeadás.