Bolyai Farkas számelméleti vonatkozású kéziratos hagyatéka

Nevezetes matematikatörténeti eredménynek számított Kiss Elemér marosvásárhelyi matematikusnak Bolyai János algebrai és számelméleti jellegű kéziratos hagyatékának a feldolgozása. Kiderült – ellentétben a korábbi vélekedéssel –, hogy Bolyai János nem csak a geometriában alkotott nagyot, hanem számos figyelemreméltó algebrai és számelméleti eredményt is elért. Bolyai János ezen vizsgálatai korábban teljesen ismeretlenek voltak.

Kiss Elemér kutatási eredményeit előbb cikkek sorozatában, majd az Akadémiai Kiadó és a Typotex Kft. közös kiadványaként megjelent *Matematikai kincsek Bolyai János kéziratos hagyatékában* című munkájában adta közre. A könyvből egyértelműen kiderül, hogy nemcsak Bolyai Jánost, hanem az édesapját Bolyai Farkast is érdekelték a számelméleti kérdések. Elolvasva a most először publikált matematikai tárgyú leveleket világossá vált az is, hogy több számelméleti probléma megválaszolására éppen Bolyai Farkas kérte meg a fiát. Természetesen merül fel így a kérdés, hogy vajon Bolyai Farkas kéziratos hagyatékában rejtőznek-e számelméleti tárgyú feljegyzések. Erre adunk választ.

Bolyai Farkas kéziratos hagyatéka

Bolyai Farkas kéziratainak javarésze a marosvásárhelyi Teleki-Bolyai Könyvtárban és a Magyar Tudományos Akadémia Könyvtárának Kézirattárában vannak. Fráter Jánosné az Akadémia Bolyai-gyűjteményének repertóriumát még az 1960-as években állította össze és tette közzé. Oláh Anna Bolyai-kutató, hosszú évek munkájának eredményeként a Marosvásárhelyen található Bolyai Farkas kéziratok katalógusát is elkészítette, amely meg is jelent az *Egy halhatalan erdélyi tudós, Bolyai Farkas* (összeállította Gazda István) kötetben az Akadémiai Kiadónál.

Oláh Anna Bolyai Farkas több ezer oldalnyi kéziratát témájuk alapján 29 csoportba sorolta, amely oldalszámuk alapján a következők (kezdve a legterjedelmesebbel): diákkori jegyzetek, matematika, fizika, levelezés, kemence, történelem, peregrinációs útikönyv, gyógyászat, csillagászat, évnyitó-, ünnepi és gyászbeszédek, irodalom, zene, tanterv, kémia, vegyes, összefüggéstelen feljegyzések, hivatalos okmányok, műszaki feljegyzések, szónoklattan, erdészet, háziszerek leírása, nyelvészet, tanulmányrészletek (bevezetők), filozófikus elmélkedések, ballisztika, publicisztika, birtok iratok, jog, életrajzi feljegyzések, gazdálkodás.

A matematikai tárgyú kéziratok három nyelven íródtak: magyarul, németül és latinul. A kéziratok két csoportra oszthatók: az egyikbe tartoznak azok az írások, amelyeket ténylegesen Bolyai Farkas jegyzett le, míg a másikba a hagyatékban található más személyek matematikai tárgyú írásai. Az utóbbi csoportba tartozó iratok szerzői között találjuk Bolyai Jánost, Michael Schuster segesvári matematikatanárt és több diákjegyzetírót: Orbán Lajost, Antal Lászlót, és Vállyi Károlyt is. Itt különösen Vályi (más írásmódban Vállyi) Károlyra szeretném felhívni a figyelmet, hiszen Bolyai Farkasnak ez a tanítványa később egy neves magyar matematikust is adott a világnak, nevezetesen a fiát, Vályi Gyulát. Réthy Mór (Vályi Gyula tanára, később tanártársa) amikor ellátogatott a Vályi családhoz és hallotta az idős Vályi Károlyt Bolyai Farkasról beszélni, majd meglátta a család féltve őrzött dedikált *Tentamen*-jét is, akkor nem volt többé kérdés a számára, hogy Vályi Gyula miért választotta a matematikusi pályát.

Bár dolgozatunk végén Schusterhez még egy rövid megjegyzés erejéig visszatérünk, a továbbiakban csak az első csoportba tartozó matematikai kéziratokról lesz szó.

Bolyai Farkas matematikai vonatkozású kéziratai

Bolyai Farkas matematikai tárgyú feljegyzései teljes egészében eddig még nem lettek feldolgozva. A hagyaték lapjai egyaránt tartalmaznak kidolgozott tanulmányokat, néhány soros feljegyzéseket és mellékszámításokat is. A továbbiakban válogatást közlünk a hagyatékból a kéziratokat témakörök szerint csoportosítva. Hivatkozásként feltüntetjük a marosvásárhelyi Teleki-Bolyai Könyvtárnak a jelzetszámait is. Az itt tárgyalt iratok a Magyar Tudományos Akadémia Könyvtárának Mikrofilmtárában is elérhetők a 8030-as tekercsen.

Néhány témakör és dolgozat Bolyai Farkas matematikai tárgyú irataiból:

a) Algebra
- A ’Log *a s* Log *b-ből* Log*(a+b) Gauss szerint’* kezdetű írás (BF. 56/1).
- Komplex számok vizsgálata

  A ’*Sigillum veri simplex*’ jeligéjű tanulmány (BF. 51/1-51/8v). Ezt vagy ennek egy tisztáltabb változatát küldte el Bolyai Farkas a lipcsei Jablonowsky-féle társaság 1837-es matematikai pályázatára, amire Bolyai János a *Responsio*t küldte. Később mindkét Bolyai visszakérték a dolgozataikat Lipcséből.
- A polinomiális tétel vizsgálata (BF. 63/1-BF. 63/3v).
- ’*A Farczádi úr radix cubicájára’* című írás (BF. 84/1,1v).

  Nagy segítséget jelentett ennek az iratnak a megfejtésben az, hogy Koretz Lőrincz kegyes szerzetbeli áldozár 1852-ben Pesten megjelent *Elemi mennyiségtan* című könyvének egy megjegyzésében sikerült rábukkanunk egy kolozsvári illetőségű Farczádi úrra, annak pontos nevére, és egy konkrét számolási példára is az általa közölt köbgyökvonási eljárást illetőleg. Ennek ismeretében Bolyai Farkas kézirata is érthetőbbé vált. Bolyai már kisiskolás korában is remekelt a fejszámolásban, számára nem jelentett gondot fejben megmondani, hogy például egy ilyen 14-jegyű számnak mi a köbgyöke: 46764948693952. Hogyan csinálta ezt Bolyai? És hogyan számolt Farczádi úr? Ezzel kapcsolatos ennek a kéziratnak a tartalma.

b) Analízis
- Hatványsorba fejtés (BF. 90/1,1v).
- Sorok konvergenciájának vizsgálata

  ’*Egy kis értekezés felsőbb rendeletre*’ című tanulmány (BF. 52/1-52/5). A matematikai hagyaték talán legnehezebben olvasható dolgozata, benne az Olivier-, Burg- és Montucla-kritériumokkal.
- Integrálszámítás (BF. 101/1,1v).
- Taylor formula (BF. 92/1).

c) Geometria
- Elemi geometriai feladatok (BF. 70-77).
- Feljegyzések a párhuzamosokról (BF. 104/1,1v,2,2v).
- A *Generatio plani* című dolgozat (BF. 54/1-54/3v).

d) Vegyes feljegyzések, mellékszámítások

e) Számelméleti tárgyú írások

A továbbiakban mi csak a számelméleti tárgyú írásokat vizsgáljuk. Nem titkolt célunk ezzel Kiss Elemér kutatásaihoz adalékokkal járulni és feltárni azokat a matematikai csomópontokat, ahol a két Bolyai vizsgálatai találkoznak. Nagyon izgalmas feladat az olyan néhány soros megjegyzések értelmének megfejtése, amelyek magukban ugyan többet sejtettnek, de csak gondolattöredékek maradtak meg róluk. Ilyenkor a két Bolyai kéziratainak együttes tanulmányozása segítségünkre lehet a probléma megoldásában.

Lássunk erre egy példát!

Bolyai Farkas a BF. 96/1 lapján ezt írja:

„ $x = \dfrac{y^{n+1}-1}{y^{n+1}-2y^{n}+1}$, *s x-nek s* $y^{n+1}-1$*-nek primnek kell lenni x pro y*=3 =2”,

majd ezt rögtön bibliai tárgyú írásokkal folytatja.

Máshol a sorok között ezt jegyzi fel (BF. 55/1):

„ $y^n x$ *, 's* $x=\dfrac{y^{n+1}-1}{y^{n+1}-2y^n+1}$ *is* $y^{n+1}-1$ *nek, s x nek primnek kell lenni, s y nak csak 3 [..] 2 lehetnek becsei, hogy x egész legyen minden n re [tehát?] y csak 2 kettő lehet."*

A BF. 57/3v oldalon is hasonlóról olvashatunk:

$$„1+y+y^2+\ldots+y^n+x(1+y+y^2+\ldots+y^{n-1})=y^n x$$

$$\frac{y^{n+1}-1}{y-1}+x\frac{y^n-1}{y-1}=y^n x$$

$$y^{n+1}-1=x(y^{n+1}-2y^n+1)$$

$$x=\frac{y^{n+1}-1}{y^{n+1}-2y^n+1}$$

xnek s $y^{n+1}-1$ *nek primnek kell lenni x=2 pro y=3; minden nre y=2",*

majd Bolyai házipraktikákkal folytatja gondolatait, egerek, bolhák és más társbérlők ellen. Vajon miért vizsgálja Bolyai Farkas ezeket az egyenleteket? Örömmel olvassuk, hogy János is ír erről édesapjának egyik levelében (BJ. 1014/1v):

„Wolfius abban is hibázott, hogy nem mondja meg, hogy y és x primek legyenek; egyébaránt az ide küldött kifejezettje x-nek el van hibázva; ugyanis nem

$$\frac{y^n(2y-1)-1}{y^n(y-2)+1}$$

hanem

$$\frac{y^{n+1}-1}{y^n(y-2)+1}$$

Hogy ez pro y>2 nem lehet egész, és a föladatnak meg nem felelhet, nagyon röviden kiviláglik onnan, hogy nyilván <

$$\frac{y^{n+1}}{y^n(y-2)}=\frac{y}{y-2}=1+\frac{2}{y-2},$$

tehát csak =1 lehet egész: miből $y^n(y-2)+1=y^{n+1}-1,$ *tehát* y^n *is =1 lenne; mi repugnál."*

Kettejük jegyzeteinek együttes tanulmányozása után már kezd világosodni a kép: arról a kérdésről van szó, hogy egy tökéletes szám (vagyis olyan pozitív egész szám, amely megegyezik a nálánál kisebb pozitív osztóinak összegével) mikor lehet $y^n x$ alakú. Ismeretes, hogy már Euklidész (Kr.e. III. század) igazolta, hogy minden $2^n(2^{n+1}-1)$ alakú szám tökéletes szám, ha *n* olyan pozitív egész szám, hogy $2^{n+1}-1$ prímszám. Kétezer év múlva, L. Euler (1707–1783) bizonyította be, hogy minden páros tökéletes szám szükségképpen $2^n(2^{n+1}-1)$ alakú (az, hogy van-e páratlan tökéletes szám ma is nyitott probléma). A Bolyaiak előbb említett feljegyzései a szorzatalak általánosítására vonatkoznak, vagyis ha egy tökéletes szám $y^n x$ alakú, ahol *x* és *y* is prímszámok, akkor vajon mit mondhatunk *x*-ről és *y*-ról. A választ bizonyítással együtt a fenti jegyzetekben találjuk: az (*y*=3, *x*=2, *n*=1) megoldáson kívül, *y* csak 2-vel lehet egyenlő és az *n*-t úgy kell választani, hogy *x* $2^{n+1}-1$ alakú prímszám legyen.

Igazi öröm a kutatónak, ha valamely általa feltárt eredményből később közkincs lesz. A közelmúltban Sándor József számelmélész a fenti eredményre a két Bolyai közös tételeként hivatkozott egyik munkájában.

Bolyai Farkas számelméleti tárgyú kéziratai

Kiss Elemér korábban említett könyvében utalt arra, hogy Bolyai Farkas is foglalkozott a Wilson-tétel és kis Fermat-tétel megfordításával. Bolyai Farkas kéziratos hagyatékában sikerült megtalálnunk ezen vizsgálatokat is.

A kis Fermat-tétel megfordítása

A kis Fermat-tétel azt állítja, hogy ha *p* prímszám és (*p,a*)=1, akkor $a^{p-1} \equiv 1$ (mod p). Bolyai Farkast nagyon érdekelte, hogy vajon igaz-e az állítás megfordítása, vagyis a kongruencia teljesüléséből következik-e *p* prímsége. Fiát is megkérdezte ennek a problémának az eldöntéséről. A tétel megfordítása nem igaz, és ezt Bolyai János *„elmélet után”* (a Jeans-tétel felfedezésével) a 341 álprím megtalálása révén látta be, vagyis ha *a*=2 és *p*=341, akkor a kongruencia teljesül, pedig a 341 nem is prímszám, mivel az 11 és 31 szorzata. Eredményét el is küldte édesapjának (BF. 100/1).

Azt gondolhatnánk, hogy ezzel Bolyai Farkas vizsgálódásait a megfordítással kapcsolatosan be is fejezte, hiszen a kérdés megoldódott, János talált egy ellenpéldát így a kis Fermat-tétel megfordítása nem igaz. Nos, az öreg Bolyai itt nem állt meg, tovább kérdezett, hiszen a *„conversának két sőt 3 esete van”* – írja és valóban, mi van akkor
„1. ha p nem prim az a-hoz, de maga prim”
„2. ha p prim az a-hoz, de maga nem prim”
„3. ha p nem prim az a-hoz, sem maga nem prim”,
ezekben az esetekben fennáll mindig a kongruencia? Bolyai Farkas könnyen választ ad erre magának az alábbi példákkal (BF. 57/1):

1. $5^5 - 1 = 624$ és ez nem osztható 5-tel (itt *a=p=5*), vagyis ekkor nem teljesül a kongruencia.
2. $2^{341-1} = 1 + \mathrm{mp}$ (ezt találta Bolyai János, itt *a=2* és *p=341*) összetett *p*-re is teljesülhet a kongruencia.
3. $2^{10-1} = 511 + 1$ és 511 nem osztható 10-zel (itt *a=2*, és *p=10*), vagyis ekkor sem teljesül a kongruencia.

Bolyai Farkas talált egy-egy példát arra, hogy ha *a* és *p* nem relatív prímek, ahol *p* prím vagy összetett szám, akkor nem teljesül a kis Fermat-tétel kongruenciája. De ő még tovább megy, észre veszi, hogy ha *a* és *p* nem relatív prímek, akkor soha nem is teljesülhet ez a kongruencia. Ezt gyorsan be is bizonyítja magának az alábbi frappáns módon (a mai átírással és szóhasználattal közlöm):

1. Állítás: Ha $(a, p) \neq 1$, akkor $a^{p-1} \equiv 1$ (mod p) nem teljesül.

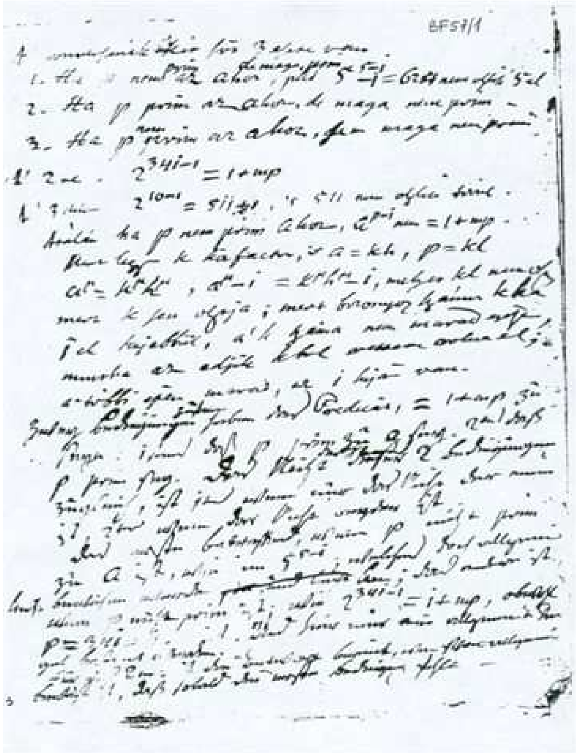
Bizonyítás: Ha $(a, p) \neq 1$, akkor léteznek olyan *k,l,h* 1-nél nagyobb egész számok, hogy *a=kh* és *p=kl*. Ekkor nyilván $a^{\mu} - 1 = k^{\mu} h^{\mu} - 1$, melynek *p* vagyis *kl* nem lehet osztója, hiszen akkor *k* is osztója kellene, hogy legyen, de az nem lehet, mert *k*-val osztva *k*-1 maradékot adna.

Bolyai Farkasnak még egy bizonyítását közöljük (a mai szokásos jelölésrendszerrel), amelyet a kis Fermat-tételre ad az *a*=2 esetre. Az igazolás a mellékelt kéziraton látható és a BF. 55/1 jelzetszámú oldalon van, kicsit hosszabban leírva, de a bizonyítás gondolata lényegében egyetlen sorban is világosan megadható.

2. Állítás: Ha *p* prímszám, akkor $2^p - 2$ osztható *p*-vel.

Bizonyítás:

$$2^p = (1+1)^p = 2 + \sum_{k=1}^{p-1} \frac{p!}{k!(p-k)!} = 2 + p \sum_{k=1}^{p-1} \frac{(p-1)!}{k!(p-k)!} = 2 + mp \,.$$



A BF. 57/1 jelzetszámú kézirat, amelyen Bolyai Farkas a kis Fermat-tétel megfordításának különböző eseteit vizsgálja.

„Tökélyes számoknak mondották a görögök” kezdetű írás a BF. 55/1 oldalon. A lapon Bolyai Farkasnak a tökéletes számokkal kapcsolatos néhány vizsgálatát, a 2. állításra adott bizonyítását, a pitagoraszi számhármasok formuláját valamint a 341 álprím próbáját is megtaláljuk.

Bolyai fenti bizonyítása a binomiális tételen alapul. Itt jegyezzük meg, hogy a kis Fermat-tételnek adható az általános esetre is az előbbihez hasonló bizonyítása, de ott a polinomiális tételt kell felhasználni.

Természetesen merül fel a kérdés, hogy vajon Bolyai Farkas hagyatékában Fermat karácsonyi tételére adott bizonyítása is meg van-e, hiszen János azt írta, hogy azt is bebizonyította az édesapja. Ezt a bizonyítást még nem sikerült megtalálnunk, de nem kizárt, hogy az valahol még meg van, mivel több feljegyzés foglalkozik a négyzetszámok és a törtek négyzetösszegének vizsgálatával.

További számelméleti érdekességek Bolyai Farkasnál

Érdemes megfigyelni, hogy a Bolyaiak nem ijedtek meg górcső alá venni a hosszú évszázadok óta megoldatlan nehéz matematikai problémákat. Foglalkoznak a híres görög feladatokkal: a szögharmadolás, kockakettőzés, körnégyszögesítés, a tökéletes számok és természetesen a párhuzamosok problémájával.

A nagy Fermat-sejtés (nagy Fermat-tétel) is megérintette őket. A „*Theorema summae duorum cuborum, quorum radices sunt numeri integri cuborum, non est cubus*” című 16 oldalas dolgozat a nagy Fermat-sejtés *n=3* esetét vizsgálja (BF. 397, 8033-as tekercs). Bolyai Farkas ezt írta a munkára: „*Schuster küldötte hozzám a segesvári Rector korában ezen imaga demonstratióját. Volt ez rövidebben demonstrálva az Euler algebrája harmadik darabja végén.*” Ezt a munkát Bolyai Farkas halála után Bolyai János megtalálta és nem túl kedvező bírálatot ír róla 1857. november 27-én kelt levelében Bolyai Gergelynek: „*idő jobb töltéséért valami mathesisi speculatiókat kísértek meg, jelesen egy oly tárgyban, melyben egy Schuster nevű becsületes segesvári rector kemény hajótörést szenvedett (mint az Öreg iratai között találtam), sőt az óriás Euler is csak félszegen ad elő*”.

Bolyai Farkas és a lánctörtek

Bolyai Farkas szerethette a lánctörtek elméletét is, mivel a kéziratainak lapjain is gyakran felbukkannak. A *Tentamen*-ben megtalálhatjuk Lord Brouncker 1655 körül megadott példáját is bizonyításával együtt, valószínűleg Euler nyomán:

3. Állítás:

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \cfrac{1^2}{2 + \cfrac{3^2}{2 + \cfrac{5^2}{2 + \ldots}}}$$

Bizonyítás: A ’Tentamen’ 2. kiadásának I. kötetének 441. oldalán olvasható bizonyítás az

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{b} + \frac{1}{c} - \ldots = \cfrac{1}{1 + \cfrac{a^2}{b - a + \cfrac{b^2}{c - b + \ldots}}}$$

azonosságnak a jólismert

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots$$

Leibniz-sorral való összevetéséből adódó igazolás, ahol a=1, b=3, c=5,…

A lánctörteket valós együtthatós egyenletek gyökeinek közelítésére is felhasználta. Bolyai híres munkájában részletesen bizonyította azt is, hogy a $\cfrac{b}{a+\cfrac{b}{a+\cfrac{b}{a+\ldots}}}$ végtelen lánctört az $x^2+ax=b$ valós együtthatós egyenlet egyik gyökét adja. Az ilyen végtelen processzusok iránti vonzalmát jól példázza az $x^m=a+x$ trinom egyenlet (ahol $m\geq 2$ egész szám, *a* pozitív valós szám) egyik gyökének az

$$
\begin{aligned}
x_0 &= 0\\
x_1 &= \sqrt[m]{a}\\
x_2 &= \sqrt[m]{a+\sqrt[m]{a}}\\
&\ldots\\
x_n &= \sqrt[m]{a+\sqrt[m]{a+\sqrt[m]{a+\ldots}}}
\end{aligned}
$$

iterációs sorozattal való megadása. Bolyai Farkas önálló matematikai erdeményei közül külföldön ez az eljárás, az ún. Bolyai-algoritmus vált legkorábban ismertté R. Baltzer, *Die Elemente der Mathematik* című könyvéből. A trinom egyenletek megoldását akkoriban a pénzügyi élet is szükségessé tette, mivel a járadékszámítás ún. kamatlábproblémája pont ilyen egyenletek megoldását igényelte. Farkas Gyula fiatalkorában a fenti eredményt tovább általánosította, tőle ered a módszer elnevezése is. Hasonló vizsgálatokkal Egerváry Jenő is foglalkozott. Később Szénássy Barna mintegy félszáz olyan dolgozatot talált, amely szorosan kapcsolódik Bolyai fenti gyökközelítő módszeréhez, például Rényi Alfréd a valós számok előállításánál tudta azt felhasználni.

Kiss Elemér könyve nemcsak a Bolyai-kutatásban hozott újat, de rámutatott egyben arra is, hogy a magyar számelméleti kutatások kezdetei nem a XIX. század végétől indultak meg hazánkban, hanem félévszázaddal korábban már a Bolyaiak munkásságától. Eredményeiket sajnos csak most ismerhette meg a nagyvilág, pedig korukban bizonyára nagyobb hatást fejtettek volna ki.

Szabó Péter Gábor