Levelek Riesz Marcel hagyatékából a Bernstein-féle egyenlőtlenségről*

Szabó Péter Gábor

Riesz Frigyes (1880-1956) és testvére, Riesz Marcel[1] (1886-1969) a 20. századi matematika meghatározó alakjai voltak. Riesz Frigyes a kolozsvári, a szegedi és a budapesti tudományegyetemen, Riesz Marcel előbb Stockholmban, majd Lundban tanított és alkotott. Mindkettőjük fő kutatási területe a matematikai analízis volt. Riesz Frigyes új tudományágak megteremtőjévé vált, egyik megalapítója volt a funkcionálanalízisnek. Riesz Marcel is nagyon sok szép matematikai eredményt ért el, a lundi egyetemen körülötte egy parciális differenciálegyenlet iskola alakult. Összegyűjtött tudományos dolgozataikat külön kötetekben adták ki [8, 9], életútjuk és munkásságuk bemutatását már többen is megtették (pl. [4, 5, 6, 11]). Riesz Marcelnek néhány éve kutatható vált a tudományos hagyatéka a lundi egyetem matematikai intézetében, amelynek feldolgozása folyamatban van és várhatóan további matematikatörténeti adalékokkal járul majd hozzá a matematikus Riesz-fivérek alaposabb megismeréséhez.

1 Riesz Marcel hagyatéka

2002-ben Riesz Ilona (Riesz Marcel unokája) a lundi egyetem matematikai intézetének ajándékozta Riesz Marcel tudományos hagyatékát. Jaak Peetre, a lundi egyetem professor emeritusa Filep László (1941-2004) nyíregyházi matematikatörténészt kérte fel a hagyaték rendezésére, aki már korábban is járt Svédországban magyar vonatkozású matematikatörténeti emlékek után kutatni. Filep László nemes, bár nem egyszerűen teljesíthető célt tűzött ki maga elé akkor, amikor folytatni kívánta Szénássy Barna (1913-1995) munkásságát. Szénássy írta meg a magyarországi matematika történetének első összefoglaló monográfiáját a 20. század elejéig bezárólag [10]. Filep innen folytatva a 20. század közepéig, vagyis az 1950-es I. Magyar Matematikai Kongresszusig szerette volna feldolgozni a hazai matematika történetét. Több tudománytörténeti tárgyú tanulmányt közölt ezen a téren és természetesen örömmel elvállalta a lundi egyetem meghívását is Riesz Marcel hagyatékának rendezésére. 2003 nyarán elutazott Lundba és néhány hét alatt el is végezte a munkát.

*A dolgozat megírását az OTKA K 67652 pályázata támogatta.

[1] A magyar nyelvű szakirodalomban találkozhatunk a Marcel és a Marcell névváltozattal is, a külföldi szakirodalom viszont szinte kivétel nélkül az egy l-lel való Marcel keresztnevet használja. Riesz Marcel egy lexikon szerkesztőinek küldött feljegyzésében azt írta, hogy ő a keresztnevét egy l-lel írja.

Riesz Marcel hagyatéka ma 45 kartondobozban van elrendezve, a lundi egyetem matematikai intézeti könyvtárának tömörraktárában. A hagyaték sok érdekes matematikatörténeti ,,kincset" rejt: leveleket, matematikai kéziratokat, hivatalos okmányokat, különlenyomatokat, folyóirat- és újságcikkeket, könyveket, fényképeket és más személyes dokumentumokat.

Riesz Marcel számos magyar és külföldi matematikussal volt kapcsolatban. Hagyatéka az alábbi magyar származású matematikusok hozzá írott leveleit őrzi:

Aczél János,
Bauer Mihály (1874-1945),
Beke Manó (1862-1946),
Császár Ákos,
Dienes Pál (1882-1952),
Erdős Pál (1913-1996),
Fejér Lipót (1880-1959),
Fekete Mihály (1886-1957),
Goldziher Károly (1881-1955),
Horváth János,
Jelitai József (1889-1944),
Kalmár László (1905-1976),
Kerékjártó Béla (1898-1946),
Kőnig Dénes (1884-1944),
Kürschák József (1864-1933),
Neumann János (1903-1957),
Pólya György (1887-1985),
Radó Tibor (1895-1965),
Sárközy Pál (1884-1957),
Schlesinger Lajos (1864-1933),
Steinfeld Ottó (1924-1990),
Szász Ottó (1884-1952),
Szegő Gábor (1895-1985),
Szilárd Károly (1901-1980),
Szőkefalvi-Nagy Béla (1913-1998),
Turán Pál (1910-1976),
Veress Pál (1893-1945).

A felsorolásban nem említettük testvérét, Riesz Frigyest, akivel természetesen szintén levelezett, sőt, amint az sejthető is, kettejük levelezése a legterjedelmesebb (két doboznyi). Filep hamar észrevette, hogy matematikatörténeti szempontból valószínűleg ez a levelezés a hagyaték legérdekesebb része. Kikölcsönözte és el is hozta magával Magyarországra a leveleket, hogy majd feldolgozza azokat. A Műszaki Szemle akkor induló Historia Scientiarum első különszámában egy válogatást is bemutatott a levelezésből [2], valamint egy rövid dolgozatban a Természet Világa Neumann-emlékszámában [3] is publikálta Neumann János és a Riesz-testvérek között váltott néhány levél részletét.

Filep igazi célja valójában az volt, hogy a Riesz-fivérek levelezéséből kötetbe rendezve közzétegye a matematikai vagy történeti szempontból legfontosabbakat. Császár Ákosnak köszönhetően Riesz Frigyes hagyatékából itthon további Riesz Marcelnek Riesz Frigyeshez írott levele került elő, és Filep már meg is tervezte a könyv felépítését, amikor sajnos tragikus dolog történt. Filep László 2004 novemberében egyik budapesti előadása közben hirtelen rosszul lett és már nem tudtak rajta segíteni, váratlanul elhunyt. Munkáját a Magyar Tudománytörténeti Intézettel közös együttműködésben folytatjuk. Megjegyezzük, hogy ugyanekkor Jaak Peetre külön kötetben dolgozza fel a svéd nyelvű levelezést, amely várhatóan szintén hamarosan meg fog jelenni.

A továbbiakban két, elsősorban matematikai szempontból érdekes dokumentumot mutatunk be Riesz Marcel hagyatékából, Fejér Lipót és Riesz Frigyes egy-egy levelét. Témájuk közös: a Bernstein-féle egyenlőtlenség tárgyalása.

2 A Bernstein-féle egyenlőtlenségről

A matematikai analízis Bernstein-féle egyenlőtlensége szerint [6]

$$|T_n'(\theta)| \leq nM,$$

ahol $T_n(\theta)$ egy n-edrendű valós együtthatós trigonometrikus polinom, vagyis

$$T_n(\theta) = a_0 + \sum_{j=1}^{n} (a_j \cos j\theta + b_j \sin j\theta)$$

és

$$M = \max_{\theta} |T_n(\theta)|.$$

Egyenlőség csak akkor áll fenn, ha $T_n(\theta) = M \sin n(\theta - \theta^*)$ alakú.

Fejér Lipót 1914-ben a konjugált trigonometrikus sorokról írott dolgozataiban hivatkozott a Bernstein-féle egyenlőtlenségre [1, 776–783, 806–813 old.]; a magyar matematikai köztudatba ő hozta be ezt az eredményt. A cikkekhez fűzött lábjegyzeteiben megjegyezte, hogy Bernstein eredeti $|T_n'(\theta)| \leq 2nM$ eredménye javítható: az is igaz, hogy $|T_n'(\theta)| \leq nM$. Fejér ott ezt csak megjegyezte, első bizonyítását Riesz Marcel publikálta [9, 127–129 old.]. A Bernstein-egyenlőtlenség az approximáció-elméletben nyert alkalmazást, ill. további más nevezetes egyenlőtlenségek vele is levezethetővé váltak.

Riesz Marcel több bizonyítást is adott a Bernstein-egyenlőtlenségre [9, 127–129 old.]. Ezek egy része a $T_n(\theta)$ trigonometrikus polinomra vonatkozó alábbi interpolációs formulán alapultak (megjegyezzük azonban, hogy közölt egy egészen más, gyökleszámláláson alapuló bizonyítást is [9, 130–144 old.]):

$$T_n(\theta) = a_n \cos n\theta + \frac{\cos n\theta}{2n} \sum_{\nu=1}^{2n} T_n(\theta_\nu)(-1)^\nu \mathrm{ctg} \frac{\theta - \theta_\nu}{2},$$

ahol

$$\theta_\nu = (2\nu - 1)\frac{\pi}{2n} \quad (\nu = 1, 2, \ldots, 2n).$$

Ha az előbbi interpolációs formulát deriváljuk, akkor a 0 pontban

$$T_n'(0) = \frac{1}{2n} \sum_{\nu=1}^{2n} T_n(\theta_\nu) \frac{(-1)^{\nu-1}}{2\sin^2 \frac{\theta_\nu}{2}}$$

adódik, amiből aztán a

$$T_n'(\theta) = \frac{1}{2n} \sum_{\nu=1}^{2n} T_n(\theta + \theta_\nu) \frac{(-1)^{\nu-1}}{2\sin^2 \frac{\theta_\nu}{2}}$$

előállítást kapjuk a trigonometrikus polinom deriváltjára.

Tekintsük a $T_n(\theta) = \sin n\theta$ trigonometrikus polinom deriváltját a 0-ban. Az előbbiek alapján, mivel $\sin n\theta_\nu = (-1)^{\nu-1}$ így

$$\frac{1}{2n}\sum_{\nu=1}^{2n}\frac{1}{2\sin^2\frac{\theta_\nu}{2}}=n.$$

Innen aztán Bernstein egyenlőtlensége is rögtön adódik, mivel

$$|T_n'(\theta)|\leq\frac{1}{2n}\sum_{\nu=1}^{2n}\left|T_n(\theta+\theta_\nu)\frac{1}{2\sin^2\frac{\theta_\nu}{2}}\right|\leq nM.$$

Riesz Marcel hagyatékából származik a következő levél, amelyben Fejér Lipót elismeréssel ír Riesz Marcelnek a Bernstein-egyenlőtlenséggel kapcsolatos eredményeiről. Fejér ebben a levelében bemutatja, hogy Bernsteinnek a tiszta szinusz-polinomra vonatkozó eredményéből könnyedén levezethető az általános polinomra vonatkozó tétel is, amit Bernstein valószínűleg nem vett észre. Fejér gondolatmenete nagyon egyszerű, ahogyan mindig is törekedett a közérthető és élvezetes stílusra. Tanítványának Kalmár Lászlónak mondta egyszer, hogy ha tudományos cikket ír, mindig az az ambíciója, hogy az olvasó a dolgozat elolvasása utána ezt mondja: ,,*Ez is valami? Ezt én is meg tudtam volna csinálni.*"

Fejér Lipót levele Riesz Marcelnek (Budapest, 1914. április 9.)
(részlet)

Kedves Barátom! Gratulálok a szép interpolácziós formulához, és a Bernstein-féle tételnek ebből eredő egyszerű bizonyításához. Ilyen bizonyítás volt az, melyet én és mások eddig siker nélkül kerestünk. Te most megtaláltad az igazi utat. Közölj azonnal C.R.[2] *czikket e tárgyról, mert tudomásom van róla, hogy most többen intenzive foglalkoznak e tárggyal.*

Az ,,egységgyökök módszerét", vagy az ,,equidistans ordináták módszerét", vagy a ,,középérték képezés módszerét" én először C.R. czikkemben (,,Sur les polynomes trigonometriques[3]*") alkalmaztam <u>trigonometrikus polynomra vonatkozó extremumfeladat megoldására</u>. Módszernek tekintettem én is mert mikoron (1913 szeptember) megoldottam vele még bizonyos extremumfeladatokat, melyek (más módszerrel tárgyalva) egy $1\frac{1}{2}$ hónap előtt Henselnek*[4] *küldött hosszabb dolgozatban fognak megjelenni, továbbá megoldottam vele a Tschebyscheff-féle extremumfeladatot, pontosan azon az úton, melyen te is, tőlem függetlenül haladtál. (A jelzett, Crelle-ben*[5] *megjelenendő dolgozat*[6] *,,Anhang"-jában megint más módszerrel jutok az n-indexű Tschebyscheff-féle nullpolynomhoz.) Én azt hittem, hogy a C.R. czikk feladata az első, mely az egységgyökök módszerével megoldatott. Azonban csakhamar rájöttem, hogy <u>H. Liebmann</u> ,,Vereinfachte*

[2]Comptes Rendus, a Francia Tudományos Akadémia folyóirata.
[3]*Comptes Rendus* 157 (1913), 571–574. [1, 773–775 old.]
[4]Kurt Hensel (1861-1941) német matematikus, Kronecker tanítványa.
[5]Journal für die reine und angewandte Mathematik, német matematikai folyóirat, A. L. Crelle indította meg 1826-ban.
[6]Über Trigonometrische Polynome, *Journal für die reine und angew. Math.*, 146 (1915), 53–82 [1, 842–872 old.].

Behandlung einiger Minimalprobleme von Tschebyscheff" (Jahresbericht der D. M. V. 18 Bd., 1909, 433. old.) czímű dolgozatában már ezen módszer alkalmazásával jut az n-edik Tsch.-féle nullpolynomhoz. (Tehát mi mindketten újra megtaláltuk azt, a mit Liebmann már 1909-ben tudott.) Az én kicsi érdemem tehát legfeljebb annyi, hogy a módszer proponálását trigonometrikus polynomokra vonatkozó extremumfeladatok megoldására újra föleleveníttettem. (Közölve csak az van, a mi a fölvett C.R. czikkben található; a többi alkalmazásra csak czélzok e czikk utolsó mondatában: ,,Je remarque encore que la méthode élémentaire de la Note présente s'applique aus te.) Az első paradigmát azonban, ismétlem, Liebmann szolgáltatta. Ki tudja, hogy ki szerepelt még előtte e téren?!

Annyi mindent szeretnék Neked ez összefüggésben mondani; hiszen már jó régen túlnyomóan ezen eszmekörben élek; de nagyon hosszadalmas volna az írásbeli kifejtés. Mellőzöm tehát e térre vonatkozó újabb vizsgálataimat és programomat. A jelzett Crelle czikket (melynek korrekturáit Frigyes is olvasni fogja) talán már korrektúrában is elküldhetjük neked; ez most téged, hogy benne vagy a dolgokban, nagyon fog érdekelni.

C.R. czikked terve kitűnő. Itt közlöm veled azt a pár sort, mellyel Bernstein eredményéből a tiszta sinuspolynomra vonatkozólag levezetem az általános polynomra vonatkozó tételt. (Érdekes, hogy erre az apróságra Bernstein nem jött rá):

Legyen $\phi(\theta)$ tetszőleges n-edrendű trigonometrikus polynom, és legyen

$$|\phi(\theta)| \leq 1, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

Akkor

$$\Phi(t) = \frac{\phi(\theta+t) - \phi(\theta-t)}{2}$$

n-edrendű tiszta sinuspolynom a t-ben (mert páratlan), és

$$|\Phi(t)| \leq 1, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

E szerint Bernsteinnek a tiszta sinuspolynomra vonatkozó eredménye alapján

$$\left|\frac{d\Phi(t)}{dt}\right| \leq n,$$

és így speczIell t=0-ra is

$$\left|\left(\frac{d\Phi(t)}{dt}\right)_{t=0}\right| \leq n.$$

Ámde

$$\left(\frac{d\Phi(t)}{dt}\right)_{t=0} = \frac{d\phi}{d\Theta},$$

e szerint

$$\left|\frac{d\phi}{d\Theta}\right| \leq n, \quad qu.e.d.$$

(Bernstein 2n-hez jut, mert a vegyes polynomot mint tiszta sinus és tiszta cosinuspolynom összegét tekinti.)

Fekete bizonyítása, mely Neked küldött czikkben jelezve van, tetszeni fog Neked. E bizonyítás megjelenendő Crelle czikkemre basiroz, e szerint a Crelleben fog megjelenni. Ő azonban csak a $|\phi'(\theta)| \leq 2n$ *egyenlőtlenséget tudja bebizonyítani.*

Ismétlem, az igazi bizonyítás a tied, mely azonfelül nagyon originális. Nagy sikered lesz vele a hozzáértők között.

(Bizonyára észrevetted, hogy a Bernstein tételét nagyon sok formában lehet kimondani, így érdekes az arithmetikai közepekkel hozni kapcsolatba.)

[...]

Már tegnap délután akartam Neked válaszolni, de akkor Haar keresett fel. Ma délelőtt meg kora reggel Frigyes jelentkezett és együtt töltöttük a délelőttöt. Nagyon örült, hogy leveledet elolvashatta és nagyon tetszett neki bizonyításod.

Leveledért köszönetet mondok, sokszor szívélyesen üdvözöllek, és maradok igaz híved és barátod

Fejér Lipót.

Testvére szép eredményeinek hatására Riesz Frigyes is elgondolkodott a Bernstein-féle egyenlőtlenségen, és maga is talált egy bizonyítást. Ez Fejér Lipótot is meglepte, vagy ahogyan Riesz Frigyes írja levelében: „*Ettől esett majdnem seggre Fejér*". Riesz Frigyes nagyon precíz matematikus volt, félkész vagy nem teljesen végig gondolt és nem megfelelő formában leírt eredménnyel nem akart a nyilvánosság elé lépni. Fejér előbbi levele után kb. két héttel maga is írt Marcelnek egy levelet, hogy megkérdezze a véleményét a talált új bizonyításról. Persze ez nem jelenti azt, hogy ettől tette volna függővé a publikálást, egyszerűen csak kíváncsi volt a testvére véleményére. Riesz Frigyes mint mindenkinek, így Marcel öccsének munkáit is kritikus szemmel olvasta. Szegedi tanítványától, Szőkefalvi-Nagy Bélától tudjuk [11], hogy Riesz Marcel egyik dolgozatát, amelyben fivére a Hilbert-féle spektráltétel nem feltétlenül korlátos önadjungált operátorra vonatkozó, Neumanntól és Stonetól származó általánosítására adott új bizonyítást ezzel utasította el a szegedi Actatól: „*Marczi, te írtál már jobbat is*".

Riesz Frigyes levele Riesz Marcelnek (Kolozsvár, 1914. április 30.)

Kedves Marczikám!

Ezt a levelet csak holnap, 1-én szándékozom befejezeni és elküldeni. Megvárom, hogy nem jelenik-e meg a holnap érkező és a 20-iki ülésről számotadó C.R.-ben a Bernstein-f. tételre vonatkozó czikked, melyről Fejérrel leveleztél, de amelyről nem tudom, hogy már megírtad és elküldted-e? Időközben ugyanis én is találtam egy bizonyítást és erről írok most neked. Fejér, akinek 2 hét előtt elmondtam, nógat, hogy közöljem. Szerintem azonban a te bizonyításod egyszerűbb és azért közlés előtt mindenesetre szeretném hallani a véleményedet. Ami az én bizonyításomat talán érdekessé teszi, az az, hogy a legtermészetesebben kínálkozó, már járt úton indul el és szinte triviálisan adja ki az $|f'(x)| \leq 2n$*-t*[7]*, a módszer*

[7]Ettől esett majdnem seggre Fejér. (Riesz Frigyes lábjegyzete a levélhez.)

finomítása azután adja n-t is.

De áttérek a részletekre. Legyen

$$f(x) = a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x + \ldots + b_n \sin nx;$$

fölteszem, hogy $|f(x)| \leq 1$; megmutatandó, hogy $|f'(x)| \leq n$. Elég, ha megmutatom, hogy $|f'(0)| \leq n$.

$$f'(0) = b_1 + 2b_2 + \ldots + nb_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)[\sin x + 2\sin 2x + \ldots + n\sin nx + \ldots]dx \tag{1}$$

A [ ]-es kifejezésben az n-nel magasabb rangú tagokat szabadon választhatom. Veszem a következő kifejezést

$$\sin x + 2\sin 2x + \ldots + n\sin nx + \overline{n-1}\sin \overline{n+1}x + \overline{n-2}\sin \overline{n-2}x + \ldots + \sin \overline{2n-1}x =$$

$$= \sin nx\left(n + 2(n-1)\cos x + 2(n-2)\cos 2x + \ldots + 2\cos \overline{n-1}x\right) = \sin nx \frac{\sin^2 \frac{nx}{2}}{\sin^2 \frac{x}{2}}$$

1)be téve

$$f'(0) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx(n + \ldots)dx \tag{2}$$

Az integrandus 3 faktora közül az első kettő $|\ | \leq 1$, a harmadik pozitív és integrálja $2n\pi$, tehát

$$\underline{|f'(0)|} \leq \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}(n + \ldots)dx = \underline{2n}.$$

Ha a becslést csak egy piczurkával finomítom, $2n$ helyett $\frac{4}{\pi}n$-et kapok. Ugyanis 2)ből

$$|f'(0)| \leq \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} |\sin nx|(n + \ldots)dx$$

de $\int_0^{2\pi} |\sin nx| \cos kx = 0$, ha $0 < k < n$,
tehát

$$|f'(0)| \leq \frac{n}{\pi}\int_0^{2\pi} |\sin nx| dx = \frac{4n}{\pi}. \tag{3}$$

Bizonyára látod is innen, hogy hogyan vágok neki a pontos tétel bebizonyításának. A $\sin nx$ függvényt ismét, hogy úgy mondjam, igyekszem jól kiegészíteni. T.i. evidens, hogy $\sin nx$ helyébe írhatok $\phi(nx)$-et, ahol $\phi(u)$ egy tetszés szerinti

$$\phi(u) = \sin u + \alpha_2 \cos 2u + \beta_2 \sin 2u + \ldots \tag{4}$$

alakú függvény. Igyekszem ϕ-t úgy választani, hogy

$$\int_0^{2\pi} |\phi(nx)|dx = \int_0^{2\pi} |\phi(u)|du$$

lehetőleg kicsiny legyen. Ezt természetesen lehet methodikusan is csinálni, amiről majd később szólok, egyelőre jöjjön a deus ex machina. Legyen pl.

$$\phi_r(u) = \sin u - r^2 \sin 3u + r^4 \sin 5u - \ldots \textit{ vagy pl. } \phi_k(u) = \pi \frac{\sin^{2k-1} u}{\int_0^{2\pi} \sin^{2k} tdt}$$

mindkét ϕ alakja a (4) alatti.

$$\int_0^{2\pi} |\phi_r(u)|du = \frac{4}{r} \arctan r \to \pi, ha\ \ r \to 1$$

$$\int_0^{2\pi} |\phi_k(u)|du = \pi \frac{\int_0^{\pi} \sin^{2k-1} udu}{\int_0^{\pi} \sin^{2k} udu} \to \pi, ha\ \ k \to \infty.$$

Vagyis (3)ban a $|\sin nx|$ helyébe valamelyik $\phi(nx)$-et téve:

$$|f'(0)| \leq \frac{(\pi+\epsilon)n}{\pi}, ahol\ \ \epsilon\ tetsz.\ \ kicsiny.\ \ Qu.e.d.$$

Talán érdekel, hogy hogyan függnek össze az $f'(0)$ itt adott

$$f'(0) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x)[n+\ldots]\phi(nx)dx \tag{5}$$

előállításai a te formuláddal.

I. Először is a $\phi_k(u)$ függvényt illetőleg: $\phi_k(t)$ 5)be téve

$$f'(0) = \frac{1}{\int_0^{2\pi} \sin^{2k} tdt} \int_0^{2\pi} f(x)[n+\ldots] \sin nx [\sin^2 nx]^{k-1} dx =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\int_0^{2\pi} \sin^{2k} tdt} \int_0^{2\pi} f(x)[n+\ldots] \sin nx [\sin^2 nx]^{k-1} dx =$$

$$= \frac{\lim_{k\to\infty} \sqrt{k-1} \int_0^{2\pi} F(x)\Phi(x)^{k-1}dx}{\lim_{k\to\infty} \sqrt{k} \int_0^{2\pi} F_1(t)\Phi_1(t)^k dt}$$

ahol $F(x) = f(x)[n+\ldots]\sin nx = f(x)\frac{\sin^2 \frac{nx}{2}}{\sin^2 \frac{x}{2}}$, $\Phi(x) = \sin^2 nx$, $F_1(t) = 1$, $\Phi_1(t) = \sin^2 t$.

Alkalmazva számlálóra és nevezőre a Laplace-féle formulát (Corresp. Hermite-Stieltjes, II, p. 185-187, újabban Lebesgue) pontosan a te formulád adódik. (Ezt persze jobban is megfogalmazhattam volna.)

II. A $\phi_r(u)$ függvényre úgy jutottam, hogy általános módszerrel indultam neki a fenti kérdésnek: $\sin u \ldots$ úgy folytatandó, hogy $\int |\sin u + \ldots|$ a lehető legkisebb *legyen, ill. a belőle formális integráczióval származtatott kérdésnek:* $\cos u + \dots$ *úgy folytatandó, hogy totális variácziója a lehető legkisebb legyen. A keresett sor*

$$\cos u - \frac{1}{3}\cos 3u + \frac{1}{5}\cos 5u - \dots \qquad (6)$$

összege $\mp\frac{\pi}{4}$*, aszerint, amint is* u *a* $\frac{\pi}{2}$ *és* $\frac{3\pi}{2}$ *közt, vagy kívül fekszik. Ennek megfelelően, ha nem vezetem be az* r *konvergenczia-faktort és a form. diff.* $\sin u - \sin 3u + \sin 5u - \dots$ *sort, hanem megmaradok 6)-nál és ennek fejében Stieltjes-integrállal dolgozom, az 5) formulából a következő lesz:*

$$f'(0) = \frac{1}{\pi n}\int_0^{2\pi} f(x)\frac{\sin^2\frac{nx}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}} d\left(\underbrace{\cos nx - \frac{1}{3}\cos 3nx + \frac{1}{5}\cos 5nx - \dots}_{\alpha(x)}\right)$$

ami, ha tekintetbe veszed, hogy $\alpha(x)$ *függvény a* $\frac{\pi}{2n}$ *páratlan többszöröseinél* $\pm\frac{\pi}{2}$*-lel ugrik, különben állandó és hogy ezen helyeken* $\sin^2\frac{nx}{2} = 1$*, a te formuládat adja.*

május 1.

Megint késik a posta, nem érkezett meg a C.R. Nem várom meg, elküldöm ezt a nagyon pongyolán megfogalmazott elmefuttatást azzal a kéréssel, bocsáss meg, ha untattalak és felelj postafordultával. És akkor azután írd meg azt is, hogy van-e már nyárra valami terved. Szeretnék veled minél hamarább találkozni, esetleg eléd menni. Ha tudsz valami okosat proponálni, köszönettel fogadom. Egy másik megoldás az volna, hogy te május végén idejössz vendégemül egy pár hétre és innen, esetleg Győr érintésével, lemegyünk sülni Olaszországba. Ez utóbbi esetben az elhatározásnak hamar meg kell érnie, mert jókor kell lenn lakást rendelni. Haar a napokban elutazott Göttingába, ahol Deby-jel megosztja az idei Wolfskehl kamatokat és kosmogoniáról ad elő az egész nyári félévben. Bocsáss meg, hogy ismét összefüggés nélkül írtam.

Tehát válaszodat postafordultával várva ölel és csókol

Friczi

Riesz Frigyes a Bernstein-féle egyenlőtlenségre adott bizonyítását rögtön meg is írta a Comptes Rendus-nek, ahol az hamarosan meg is jelent [7, 1443–1446 old.]. Érdemes felfigyelni a levél végén megjelenő Stieltjes-integrálra. Jól ismert, hogy Stieltjes egy lánctörtekkel kapcsolatos vizsgálata során vezette be ezt az új integrálfogalmat 1894-ben (bár Kőnig Gyula ennél korábban is használta már előadásaiban [11]). Jól ismert az is, hogy akkoriban ez még nem váltott ki semmilyen különösebb figyelmet. Riesz Frigyesnek köszönhető, hogy 15 év múlva felfigyeltek rá a matematikusok, amikor Riesz Hadamard egyik problémájára adott új megoldást a Stieltjes-integrál alkalmazásával. Azóta már persze ezt a fogalmat is általánosították [7].

Irodalomjegyzék

1. *Fejér Lipót összegyűjtött munkái I-II.* A Magyar Tudományos Akadémia megbízásából sajtó alá rendezte Turán Pál, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1970.
2. Filep László: Szemelvények Riesz Frigyesnek Riesz Marcellhez írott leveleiből, Műszaki Szemle. *Historia Scientiarum* 1, 27 (2004), 26–38.
3. Filep László: Neumann János és a Riesz testvérek, *Természet Világa Neumann-emlékszám*, 2003, 80.
4. Halmos Pál: Riesz Frigyes munkássága, *Matematikai Lapok* 29 (1981), 13–20.
5. Horváth János: Riesz Marcel matematikai munkássága I., *Matematikai Lapok* 26 (1976), 11–37.
6. Horváth János: Riesz Marcel matematikai munkássága II., *Matematikai Lapok* 28 (1980), 65–100.
7. Németh József – Varga Antal: *Az integrálról*, Polygon Könyvtár, Polygon, Szeged, 2007.
8. *Riesz Frigyes összegyűjtött munkái I-II.* A Magyar Tudományos Akadémia megbízásából sajtó alá rendezte Császár Ákos, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1960.
9. Riesz, Marcel: *Collected Papers*, (Edited by Lars Gårding and Lars Hörmander), Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1988.
10. Szénássy Barna: *A magyarországi matematika története* (3. átdolgozott kiadás), Polygon Könyvtár, Polygon, Szeged, 2008.
11. Szőkefalvi-Nagy Béla: Riesz Frigyes élete és személyisége, *Matematikai Lapok* 29 (1977-1981), 1–5.