

A végtelenbe és tovább

Iván Szabolcs

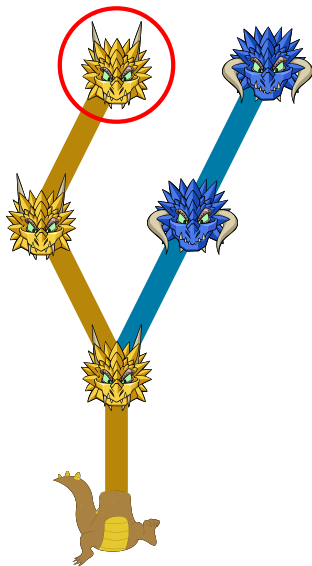
2019. szeptember 27.

Az előadás az Innovációs és Technológiai Minisztérium
UNKP-19-4-SZTE-22 kódszámú Új Nemzeti Kiválóság
Programjának szakmai támogatásával készült.

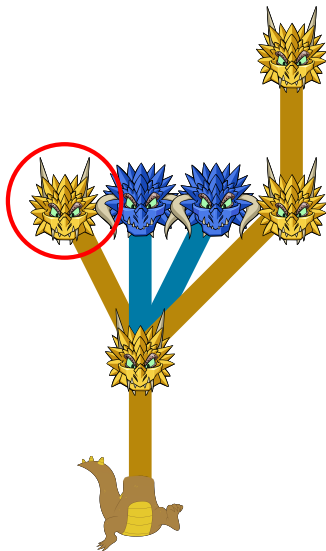


NEMZETI KUTATÁSI, FEJLESZTÉSI
ÉS INNOVÁCIÓS HIVATAL

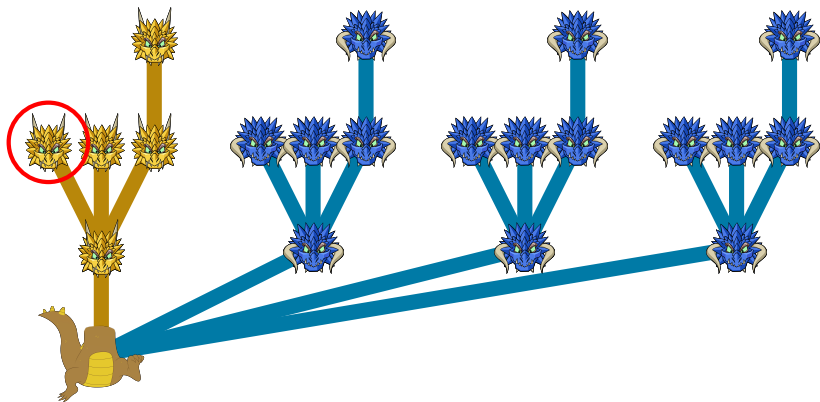
Herkules és a hidra



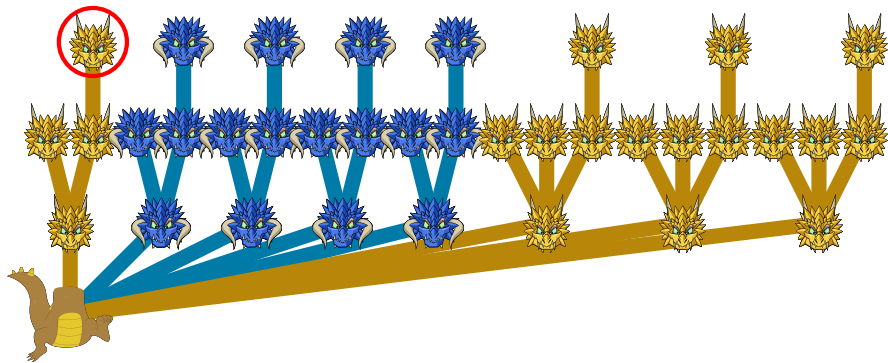
Herkules és a hidra



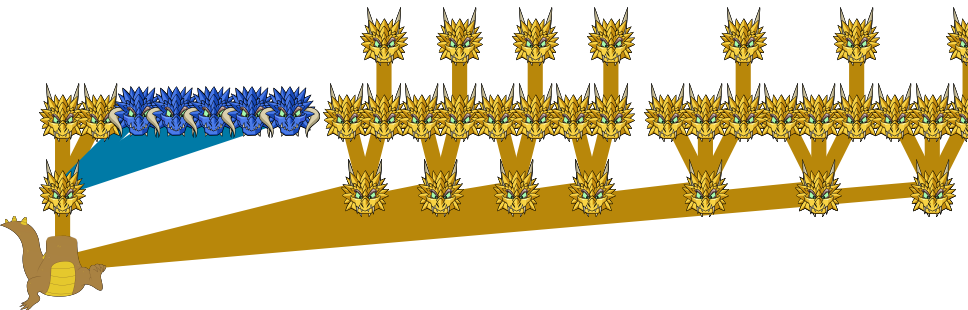
Herkules és a hidra



Herkules és a hidra



Herkules és a hidra



Gyenge Goodstein sorozatok

- Induljunk ki egy számból (pl. 13), írjuk fel kettes számrendszerben ($13 = 2^3 + 2^2 + 2^0$)
- Növeljük a számrendszer alapját eggyel, vonjunk ki az eredményből egyet, ezt ismételgessük
 - $3^3 + 3^2 + 3^0 - 1 = 36 = 3^3 + 3^2$
 - $4^3 + 4^2 - 1 = 79 = 4^3 + 3 \times 4^1 + 3 \times 4^0$
 - $5^3 + 3 \times 5^1 + 3 \times 5^0 - 1 = 142 = 5^3 + 3 \times 5^1 + 2 \times 5^0$
 - $6^3 + 3 \times 6^1 + 2 \times 6^0 - 1 = 235 = 6^3 + 3 \times 6^1 + 1 \times 6^0$
 - $7^3 + 3 \times 7^1 + 1 \times 7^0 - 1 = 364 = 7^3 + 3 \times 7^1$
 - $8^3 + 3 \times 8^1 - 1 = 535 = 8^3 + 2 \times 8^1 + 7 \times 8^0$
 - 753, 1025, 1357, 1755, 2225, 2773, 3405, 4127, 4944, 5863, 6890, 8031, ...
 - a 100. tag 636.327
 - a 200. tag $63 \times 200^2 + 62 \times 200^1 + 55 \times 200^0 = 2.532.455$
 - az 1000. tag $63 \times 1000^2 + 60 \times 1000 + 22 = 63.060.022$
 - a 10.000. tag 6.300.566.382
 - a 100.000. tag 630.005.331.070
 - az 1.000.000.000. tag 63.000.000.040.073.741.822

Gyenge Goodstein sorozatok

Ha pl. 7-ből indulunk ki:

- $7 = 2^2 + 2^1 + 2^0$
- $3^2 + 3^1 + 3^0 - 1 = 12$
- $4^2 + 4^1 - 1 = 4^2 + 3 \times 4^0 = 19$
- $5^2 + 3 \times 5^0 - 1 = 27$
- $6^2 + 2 \times 6^0 - 1 = 37$
- $7^2 + 7^0 - 1 = 49$
- $8^2 - 1 = 7 \times 8^1 + 7 \times 8^0 = 63$
- $7 \times 9^1 + 7 \times 9^0 - 1 = 69$
- a 100. tag 426
- az 500. tag 1010
- a 600. tag 1022
- a 700. tag 1022
- az 1000. tag 1022
- a 2000. tag 46
- a 2047. tag 0.

Ha a 8-ból, az 1.000.000.000. tag 402.653.182.610.612.734.

Rekurzív függvények

Hányféleképp juthatunk el egy $n \times k$ -s tábla bal alsó sarkából a jobb felsőbe úgy, hogy csak jobbra / felfelé léphetünk?

1	4	10	20	35
1	3	6	10	15
1	2	3	4	5
1	1	1	1	1

$$P(n, k) = \begin{cases} 1 & , \text{ ha } n = 1 \text{ vagy } k = 1 \\ P(n-1, k) + P(n, k-1) & , \text{ egyébként} \end{cases}$$

Honnan tudjuk, hogy egy ilyen képlet kiszámításakor véges sok lépésben megállunk?

Rekurzív függvények

$$P(n, k) = \begin{cases} 1 & , \text{ ha } n = 1 \text{ vagy } k = 1 \\ P(n-1, k) + P(n, k-1) & , \text{ egyébként} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} P(2, 3) &= P(1, 3) + P(2, 2) \\ &= 1 + P(1, 2) + P(2, 1) \\ &= 1 + 1 + 1 \\ &= 3 \end{aligned}$$

„Leszállási feltétel”: $n + k$

- természetes szám
- csökken

Rekurzív függvények

$$P(x, y, d) = \{ \text{mici}(x, y, d/2); \text{tigris1}(x + d/2, y, d/2); \\ \text{tigris2}(x, y + d/2, d/2); P(x + d/2, y + d/2, d/2) \}$$

d csökken, nemnegatív, de **mégse** leszállási feltétel – mert nem egész

Rekurzív függvények

$$P(n) = \begin{cases} 1 & , \text{ ha } n = 1 \\ 1 + P(n/2) & , \text{ ha } n \text{ páros} \\ 1 + P(3n + 1) & , \text{ egyébként} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} P(3) &= 1 + P(10) = 2 + P(5) = 3 + P(16) \\ &= 4 + P(8) = 5 + P(4) = 6 + P(2) \\ &= 7 + P(1) \\ &= 8 \end{aligned}$$

Leszállási feltétel: ?

a 100.000.000.000.000.000-nál kisebb számok közül

$n = 93.571.393.692.802.302$ áll meg a legkésőbb, 2091 lépés után.

87×2^{60} -ig (kb 3.11×10^{19} -ig) ellenőrizve (as of 2018), eddig minden számra megállt.

Nagy ellenpéldák

Attól, hogy valamit nagy korlátig ellenőrzünk, nem biztos, hogy igaz:

- Pólya sejtése: „tetszőleges n -re, az n -nél kisebb számoknak legalább a felének páratlan sok prímosztója van” – igaz $n = 906.150.257$ -ig, tartotta magát 1919 - 1958 közt
- a Skewes-szám: ha $\pi(x)$ az x -nél kisebb prímek száma, $\text{li}(x) = \int_0^x \frac{dt}{\ln t}$ a logaritmikus integrál, akkor $x = 10^{19}$ -ig (as of 2015) végig $\pi(x) < \text{li}(x)$, de tudjuk, hogy valahol 1.39×10^{316} előtt fordítva is van.
- a Mertens-sejtés: egy bizonyos $M(n)$ számelméleti függvényről Thomas Joannes Stieltjes sejtette, hogy minden n -re $|M(n)| \leq \sqrt{n}$ – tartotta magát 1885 – 1985 közt. Erre nem ismerünk konkrét ellenpéldát, csak hogy létezik legalább egy szám valahol 10^{16} és $10^{6.91 \times 10^{39}}$ közt, amire hamis. . . (2006)

Rekurzív függvények

Nézzük a következő **black-box** algoritmust:

- input: véges sok nemnegatív szám
- egy lépésben: választ egy pozitívat közülük, azt csökkenti eggyel, a mögötte állókat tetszőleges nemnegatív egész számra átírhatja
- ha minden 0 lesz, leáll

pl:

$$(3, 4, 5) \mapsto (3, 3, 42) \mapsto (3, 3, 41) \mapsto (3, 3, 40) \mapsto (3, 2, 500) \\ \mapsto (3, 2, 499) \mapsto (2, 42, 42) \mapsto (2, 41, 500) \mapsto \dots$$

- Erre **nem létezik** természetes számmal működő leszállási feltétel
- Pedig **mindenképp megáll**

Melyik halmaz nagyobb?

- $\emptyset = \{\}$
- $\{0\}$
- $\{100\}$
- $\{1, 2, 3\}$
- $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$
- $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$
- $\mathbb{Q} = \{p/q : p, q \in \mathbb{Z}, q > 0, \text{lnko}(p, q) = 1\}$
- $\mathbb{R}$
- a $(0, 1)$ intervallum

A megszámlálhatóan végtelen

$\mathbb{N}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	...
$\mathbb{Z}$	0	1	-1	2	-2	3	-3	4	-4	5	-5	6	-6	7	-7	...
$\mathbb{Q}$	$\frac{0}{1}$	$\frac{1}{1}$	$-\frac{1}{1}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{2}{1}$	$-\frac{2}{1}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{3}{1}$	$-\frac{3}{1}$	$\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{2}$	...

ezek a halmazok „egyforma nagyk”

A megszámlálhatóan végtelen

$\mathbb{R}$ nagyobb, már $[0, 1)$ is:

- Egy valós szám a $[0, 1)$ intervallumban: egy $0.b_1b_2b_3b_4\dots$ alakú végtelen string, $b_i \in \{0, 1\}$ (kettes számrendszerben végtelen „tizedes” törteként)
- írjunk fel valós számokat egy $r_1, r_2, r_3, \dots$ sorozatban
- akkor az egész sorozatot egy (végtelen) táblázatba rendezhetjük:

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	$\dots$
$r_1 =$	0	0	1	0	0	$\dots$
$r_2 =$	0	1	0	1	1	$\dots$
$r_3 =$	1	1	0	0	1	$\dots$
$r_4 =$	0	1	0	0	0	$\dots$
$\dots$						

- és a **pirossal** jelölt átlóban szereplő 0.0100... elemet ha minden koordinátán megváltoztatjuk, a kapott 0.1011... elem egyik sorban sem szerepelhet (hiszen az r_i -től a b_i -ben különbözik)
- tehát pl. ez a valós szám nem jelenhet meg a táblázatban $\Rightarrow$ nem lehet felsorolni a valós számokat (ez a „**diagonális módszer**”)

Rendezések, rendtípusok

Amiért „nagyobb” érezzük $\mathbb{Z}$ -t (vagy $\mathbb{Q}$ -t), mint $\mathbb{N}$ -t: nem csak egy **halmazunk** van, hanem egy **rendezett halmazunk** az X halmaz elemein egy $<$ reláció **rendezés**, ha:

- $x < y$ és $y < z$ -ből következik $x < z$ („transzitivitás”)
- minden x, y -ra vagy $x < y$, vagy $y < x$, vagy $x = y$ áll fenn (pontosan az egyik)

$(A, <)$ **beágyazható** $(B, \prec)$ -be, ha van $f : A \rightarrow B$ úgy, hogy $x < y \Rightarrow f(x) \prec f(y)$

Így pl. $(\mathbb{N}, <)$ beágyazható $(\mathbb{Z}, <)$ -be, az pedig $(\mathbb{Q}, <)$ -be, de visszafelé nem!

Ha beágyazható úgy, hogy B minden elemét meg is kapjuk, akkor a két rendezés **azonos típusú**.

Rendezések, rendtípusok

A természetes számok (a szokásos rendezéssel) rendtípusának a jele: ω .

Pl. ω rendtípusú rendezések:



- $0 < 1 < 2 < 3 < 4 < \dots$
- $1 < 2 < 3 < 4 < 5 < \dots$
- $a < aa < aaa < aaaa < aaaaa < \dots$

A véges rendezések rendtípusát az alaphalmaz elemeinek számával jelöljük:

- $1 < 2 < 3 < 4 < 5 < 6 < 7$ rendtípusa 7
- szende < szundi < morgó < hapci < tudor < vidor < kuka rendtípusa is 7
- hétfő < ... < vasárnap rendtípusa is 7

(Ha két véges halmaz elemszáma megegyezik, akkor bárhogy is rendezzük őket, azonos típusú rendezéseket kapunk)

Rendezések, rendtípusok

Ha $(X, <)$ és $(Y, <)$ két rendezett halmaz, X és Y **diszjunktak** (nincs közös elemük), akkor $X \cup Y$ -t rendezhetjük úgy, hogy

- X -en belül megtartjuk X rendezését
- Y -on belül Y -ét
- és X minden eleme kisebb, mint Y minden eleme

Ennek jele $X + Y$. Rendtípusa a két rendtípus összege.

Pl. ha X a természetes számok a szokásos rendezéssel, Y pedig csak a „ ∞ ” jelet egyedül tartalmazó halmaz, akkor $X + Y$:

$$0 < 1 < 2 < 3 < \dots < \infty$$

rendtípusa $\omega + 1$. (Ez nem ugyanaz, mint ω .)

Ha fordítva adjuk össze őket:

$$\infty < 0 < 1 < 2 < 3 < \dots$$

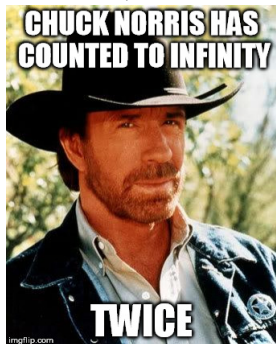
rendtípusa $1 + \omega = \omega$.

Rendezések, rendtípusok

Pl. vegyük $\mathbb{N}$ két **példányát**: az elsőben $(n, 0)$, a másodikban $(n, 1)$ alakú párok vannak, $n \in \mathbb{N}$. Akkor az összegük:

$$(0, 0) < (1, 0) < (2, 0) < (3, 0) < \dots < (0, 1) < (1, 1) < (2, 1) < (3, 1) < \dots$$

Ez **nem** ω , hanem $\omega + \omega$ típusú (ami másik).



#Easy

Lehet tovább is:

- $\omega + \omega + 1$
- $\omega + \omega + \omega + \omega + 42$

Ha X és Y rendezett halmazok, akkor $X \times Y$ -t általában is rendezhetjük

- elsősorban a **második** koordináta szerint,
- ha ott egyenlőség van, akkor az első koordináta szerint

Fent: $X = \mathbb{N}$, $Y = \{0, 1\}$. A rendtípus $\omega \times 2$.

Rendezések, rendtípusok

$\omega \times 2$:

$$(0, 0) < (1, 0) < (2, 0) < \dots < (0, 1) < (1, 1) < (2, 1) < \dots$$

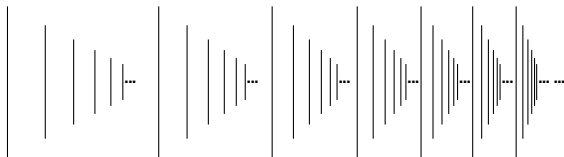
$2 \times \omega = \omega$:

$$(0, 0) < (1, 0) < (0, 1) < (1, 1) < (0, 2) < (1, 2) < (0, 3) < (1, 3) < \dots$$

$\omega \times 3$:

$$(0, 0), (1, 0), (2, 0), \dots, (0, 1), (1, 1), (2, 1), \dots, (0, 2), (1, 2), (2, 2), \dots$$

$\omega \times \omega = \omega^2$:



Jólrendezések, rendszámok

Egy $(X, <)$ rendezett halmaz **jólrendezett**, ha nincs benne végtelen leszálló lánc:

$$\dots < x_4 < x_3 < x_2 < x_1 < x_0.$$

A jólrendezett halmazok rendtípusait **rendszám**nak hívjuk.

- a véges halmazok jólrendezettek $\Rightarrow$ a természetes számok rendszámok
- $\mathbb{N}$ is (a szokásos rendezéssel) $\Rightarrow \omega$ is rendszám
- $\mathbb{Z}$ nem az, $\mathbb{Q}$ sem

Jólrendezések, rendszámok

Egy α rendszám kisebb, mint a β rendszám, ha van két olyan rendezett halmaz, X és Y , hogy X típusa α , Y típusa β , X beágyazható Y -ba, de fordítva nem

Pl.

$$0 < 1 < 2 < 3 < \dots < \omega < \omega + 1 < \omega + 2 < \dots < \omega \times 2$$

$$\omega \times 2 < \omega \times 2 + 1 < \omega \times 2 + 2 < \dots < \omega \times 3 < \dots < \omega^2$$

$$\omega^2 < \omega^2 + 1 < \omega^2 + 2 < \dots < \omega^2 + \omega < \omega^2 + \omega + 1$$

(de pl. $\omega + \omega^2 = \omega^2$)

Rendszámokra igaz, hogy $\alpha < \beta$ pont akkor, ha β -nak az α egy „valódi kezdőszelete”

Rendszámok, megállási feltételek

A rendszámok már „elég sokan vannak” :

- Ha X rendszámoknak egy tetszőleges halmaza, akkor van olyan α rendszám, ami minden X -beli rendszámnál nagyobb
- („az összes rendszámok halmaza” nem létezik, nem minden „sokaság” halmaz)
- Rendszámoknak tetszőleges halmaza jólrendezett
- Ha egy rekurzív függvény paramétereire rendszámokat tudunk rendelni úgy, hogy ez a rendszám minden rekurzív híváskor csökken, akkor a kiszámítás garantáltan megáll véges sok lépésen belül
- Visszafele is: ha garantáltan megáll, akkor rendszám mindig tartozik hozzá
- (csak az nem biztos, hogy ki tudjuk számítani. . .)

Rendszámok: hatványozás

- Ha α egy rendszám, akkor $\alpha \times \omega$ az $X \times \mathbb{N}$ rendtípusa (ahol X rendtípusa α)
- Így megkapjuk az ω , $\omega^2 = \omega \times \omega$, $\omega^3 = \omega^2 \times \omega$,
... rendszámokat
- Általában: $\omega^{\alpha+1} = \omega^\alpha \times \omega$

Mi lehet ω^ω ? (Erre még visszatérünk mindjárt)

A black-box algoritmus

- input: véges sok nemnegatív szám
- egy lépésben: választ egy pozitívat közülük, azt csökkenti eggyel, a mögötte állókat tetszőleges nemnegatív egész számra átírhatja
- ha minden 0 lesz, leáll

pl:

$$(3, 4, 5) \mapsto (3, 3, 42) \mapsto (3, 3, 41) \mapsto (3, 3, 40) \mapsto (3, 2, 500) \\ \mapsto (3, 2, 499) \mapsto (2, 42, 42) \mapsto (2, 41, 500) \mapsto \dots$$

Rendeljük az $(n_1, n_2, \dots, n_k)$ inputhoz az

$\omega^k \times n_1 + \omega^{k-1} \times n_2 + \dots + \omega \times n_{k-1} + n_k$ rendszámot!

$$\omega^2 \times 3 + \omega \times 4 + 5 > \omega^2 \times 3 + \omega \times 3 + 42 > \omega^2 \times 3 + \omega \times 3 + 41$$

A gyenge Goodstein-sorozatok

Minden lépésben az aktuális számunkhoz egy rendszámot rendelünk: „a számrendszer alapját ω -ra átírva”

Szám			Rendszám
$2^3 + 2^2 + 2^0$	=	13	$\omega^3 + \omega^2 + 1$
$3^3 + 3^2$	=	36	$\omega^3 + \omega^2$
$4^3 + 4^1 \times 3 + 4^0 \times 3$	=	79	$\omega^3 + \omega \times 3 + 3$
$5^3 + 5^1 \times 3 + 5^0 \times 2$	=	142	$\omega^3 + \omega \times 3 + 2$
$6^3 + 6^1 \times 3 + 6^0$	=	235	$\omega^3 + \omega \times 3 + 1$
$7^3 + 7^1 \times 3$	=	364	$\omega^3 + \omega \times 3$
$8^3 + 8^1 \times 2 + 8^0 \times 7$	=	535	$\omega^3 + \omega \times 2 + 7$

a rendszám minden lépésben csökken $\Rightarrow$ minden gyenge Goodstein sorozat véges

Rendszámok fajtái

Minden α rendszám az alábbi három alaknak (pontosan) egyikében áll elő:

- $\alpha = 0$
- $\alpha = \beta + 1$ egy (nála kisebb) β rendszámra – ők a **rákövetkező rendszámok**
- α a **legkisebb** olyan rendszám, ami egy olyan X végtelen rendszámhalmaz minden eleménél nagyobb, aminek nincs legnagyobb eleme – ők a **limesz rendszámok**

Pl:

- $1, 2, 3, \dots, \omega + 1, \omega + 2, \dots, \omega^2 + \omega \times 2 + 42$ rákövetkező rendszámok
- az $\{1, 2, 3, 4, \dots\}$ rendszámhalmaz minden eleménél ω nagyobb, nála kisebb felső korlátja nincs ennek a halmaznak, ennek a halmaznak nincs legnagyobb eleme $\Rightarrow \omega$ limesz rendszám

Rákövetkezés, limesz és hatványozás

- ω a legkisebb felső korlátja (**szuprémuma**) a $\{2, 4, 6, 8, \dots\}$ végtelen rendszámhalmaznak is
- minden α limesz rendszám felírható mint $\alpha = \bigvee_{\beta < \alpha} \beta$, az összes nála kisebb rendszám halmazának szuprémuma

Azt már láttuk, hogy $\alpha^0 = 1$ és $\alpha^{\beta+1} = \alpha^\beta \times \alpha$.

Ha α egy rendszám és β egy limesz rendszám, akkor legyen

$$\alpha^\beta = \bigvee_{\gamma < \beta} \alpha^\gamma$$

Ezek szerint pl. ω^ω -t úgy kapjuk, hogy

- vesszük az összes ω -nál kisebb rendszámot: $0, 1, 2, 3, \dots$
- nézzük az $\{\omega^0, \omega^1, \omega^2, \omega^3, \dots\}$ halmazt
- és ennek a szuprémuma lesz ω^ω .

Ez most egy megszámlálható halmaz, ezért fel tudjuk írni másképp is:

$$\omega^\omega = 1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 + \dots$$

Ha el akarunk képzelni egy ω^ω rendtípusú rendezett halmazt:

- természetes számok sorozatait rendezzük, pl. $(1, 4, 2)$, $(3, 1)$ és $()$ az elemei
- elsősorban hossz szerint
- az egyforma hosszúakat pedig (mondjuk) az utolsó eltérő koordináta szerint

ω^ω

$()$,

$(0), (1), (2), \dots$

$(0, 0), (1, 0), (2, 0), \dots, (0, 1), (1, 1), (2, 1), \dots, \dots,$

$(0, 0, 0), (1, 0, 0), (2, 0, 0), \dots, (0, 1, 0), (1, 1, 0), (2, 1, 0), \dots, \dots,$

$(0, 0, 1), (1, 0, 1), (2, 0, 1), \dots, (0, 1, 1), (1, 1, 1), \dots, \dots, \dots,$

$(0, 0, 0, 0), \dots$

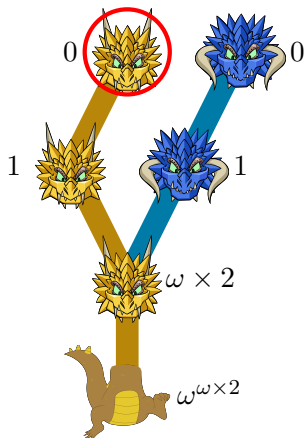
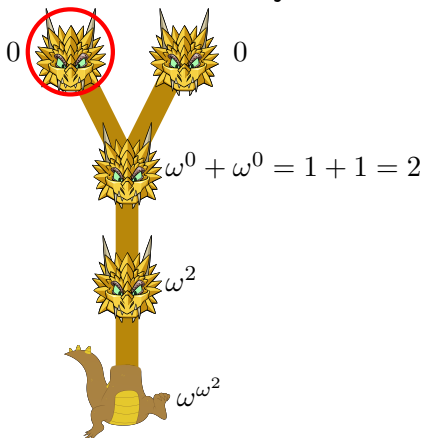
Rendszámot a hidráknak



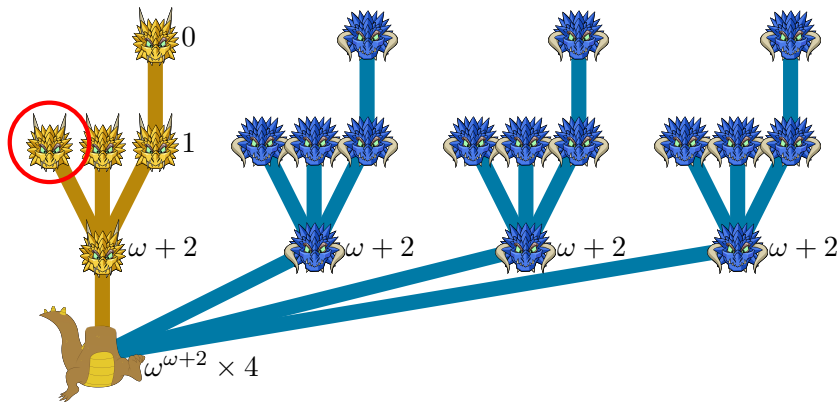
Rendszámot a hidráknak

Rendeljünk rendszámokat hidrákhoz:

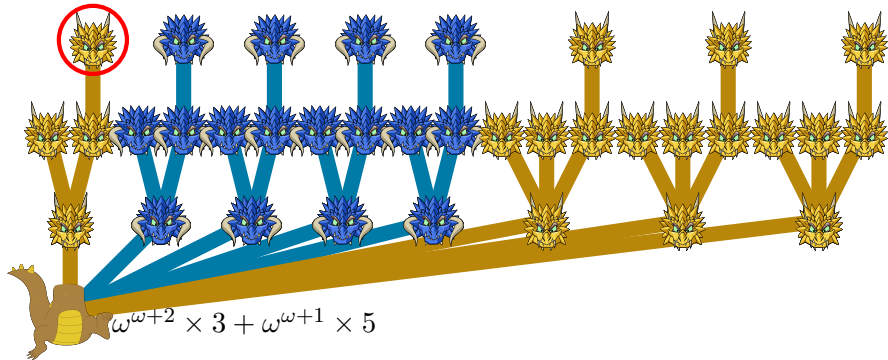
- az egy pontú hidrához 0
- ha a hidra gyerekeihez az $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots \geq \alpha_n$ rendszámokat rendeltük, akkor a hidrához az $\omega^{\alpha_1} + \omega^{\alpha_2} + \dots + \omega^{\alpha_n}$ rendszámot rendeljük



Rendszámot a hidráknak



Rendszámot a hidráknak



A hidra rendszáma mindig csökken

Herkules mindig győz

Szétszórt rendezések

Programok helyességének ellenőrzésekor („verifikációkor”) a program viselkedése sokszor nem rendszámokkal, hanem szétszórt rendtípusokkal modellezhető.

- Szétszórt rendezés: nem ágyazható bele $\mathbb{Q}$

Pl. $\mathbb{Z}$ szétszórt (de nem jólrendezett). Ami jólrendezett, szétszórt is. $\mathbb{Z}$ rendtípusa: $\zeta = (-\omega) + \omega$.

Megszámlálható szétszórt rendezések

A megszámlálható rendszámokat megkaphatjuk:

- 0, 1, ω -összegzés

Pl.

$$2 = 1 + 1 + 0 + 0 + 0 + 0 + \dots$$

$$\omega = 1 + 1 + 1 + 1 + \dots$$

$$\omega \times 2 + 4 = \omega + \omega + 1 + 1 + 1 + 1 + 0 + 0 + 0 + 0 + \dots$$

$$\omega^2 = \omega + \omega + \omega + \dots$$

$$\omega^3 = \omega^2 + \omega^2 + \omega^2 + \dots$$

$$\omega^\omega = 1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \dots$$

Megszámlálható szétszórt rendezések

A megszámlálható szétszórt rendtípusokat megkaphatjuk:

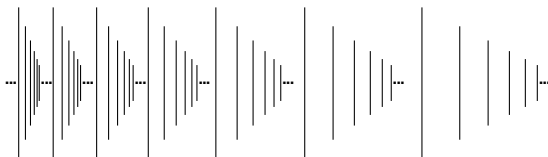
- 0, 1, ζ -összegzés

Pl.

$$2 = \dots + 0 + 0 + 0 + 1 + 1 + 0 + 0 + 0 + 0 + \dots$$

$$\omega = \dots + 0 + 0 + 0 + 1 + 1 + 1 + 1 + \dots$$

$$\omega \times (-\omega) = \dots + \omega + \omega + \omega + 0 + 0 + 0 + 0 + \dots$$



$$? = \omega + (-\omega) + (-\omega) + \omega + (-\omega) + \omega + \omega + \dots$$

Hogy adunk meg rendtípusokat?

Rendszámokra van **Cantor normálforma**:

$$\alpha = \omega^{\alpha_1} + \omega^{\alpha_2} + \dots + \omega^{\alpha_n}$$

ahol $n \geq 0$ egész szám, $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots \alpha_n$ rendszámok
(eddig is ilyet használtunk)

Elsőre úgy tűnhet, hogy ez elég is, csak az α_i -ket is ebbe az alakba kell átírjuk...

...csakhogy

$$\varepsilon_0 := 1 + \omega + \omega^\omega + \omega^{\omega^\omega} + \omega^{\omega^{\omega^\omega}} + \dots = \omega^{\omega^{\omega^{\dots}}}$$

$$\varepsilon_0 = \omega^{\varepsilon_0}$$

Szavak lexikografikus rendezése

Vegyük a $\{0, 1\}$ ábécé feletti **szavak** halmazát:

$$\{0, 1\}^* = \{0, 1, 00, 01, 10, 11, 000, 001, \dots\}$$

Nézzük a szavak **lexikografikus rendezését**: az u szó kisebb, mint a v , ha

- u a v -nek **prefixe**: $0010 < 0010110$ vagy
- az első eltérő betűnél u -ban 0 van, v -ben 1: $001010 < 0100$

Nevezzük **nyelv**nek szavak tetszőleges halmazát, ez ad egy rendtípust

- $\{0, 00, 000, 0000, \dots\} = \{0^n : n \geq 1\}$ rendtípusa ω
- $\{1, 01, 001, 0001, \dots\}$ rendtípusa $-\omega$
- $\{0^n : n \geq 0\} \cup \{0^n 1 : n \geq 1\}$ rendtípusa $\omega + (-\omega)$
- $\{1^n 0^m : n, m \geq 1\}$ rendtípusa ω^2 :

$$10 < 100 < 1000 < \dots < 110 < 1100 < 11000 < \dots < 1110 < \dots$$

Nyelvek rendtípusai

Minden megszámlálható rendtípus előáll egy nyelv rendtípusaként.

Hogy adjunk meg nyelveket?

Egy ε_0 típusú nyelv

Legyen L a legszűkebb olyan nyelv, amire igaz:

- ha $t \geq 0$ egész és $u_1 \geq u_2 \geq \dots \geq u_t$ mind L -beli szavak, akkor $1u_1u_2\dots u_t0$ is L -beli szó.

Tkp. „helyes zárójelezések” azzal, hogy egy zárójelen belül a közvetlen alatta lévő kifejezések csökkenő ábécésorrendben kell legyenek. Pl. ide tartozik

- 10 (a $t = 0$ választás ezt adja)
- 1100 ($t = 1$, benne van 10)
- 110100 ($t = 2$, benne van 10 és 10)
- 11100100 ($t = 2$, $1100 \geq 10$ a két belső szó)
- 11011000 **NEM**, mert a belső szavak nem csökkenő sorrendben vannak: $10 < 1100$
- ...

Ennek a nyelvnek a rendtípusa belátható, hogy ε_0 , és minden, ε_0 -nál kisebb rendszám is előáll egy olyan nyelv rendtípusaként, ami „az L -beli összes olyan szó, mely kisebb, mint x ”, ahol x valamilyen szó

Környezetfüggetlen nyelvtanok

Nyelvek megadásának egy módja környezetfüggetlen (context-free, CF) nyelvtannal történhet:

- van véges sok változónk, egyikük a „kezdőszimbólum”
- átírási szabályok: minden változóra van egy vagy több alternatíva, amire átírhatjuk
- egy alternatíva: egy olyan szó, melyben változók és bitek is szerepelhetnek

pl:

$$X \rightarrow 1X \mid Y$$

$$Y \rightarrow 0Y \mid 0$$

Ha X a kezdőszimbólum, akkor egy **levezetés** lehet pl:

$$X \Rightarrow 1X \Rightarrow 11X \Rightarrow 111X \Rightarrow 111Y \Rightarrow 1110Y \Rightarrow 11100Y \Rightarrow 111000$$

Ez a nyelvtan az $\{1^m 0^n : m, n \geq 1\}$ nyelvet **generálja** (típusa ω^2).

Környezetfüggetlen rendtípusok

A CF nyelvtannal generálható nyelvek rendtípusait
környezetfüggetlen rendtípusnak nevezzük.

- egy rendszám pontosan akkor CF, ha kisebb, mint $\omega^{\omega^{\omega}}$
- egy szétszórt CF rendezés „rangja” mindig kisebb, mint ω^{ω}

Az előző példa L nyelve (sem annak a rendtípusa) **nem**
környezetfüggetlen.

Izomorfizmus

A kérdés, amit vizsgálunk: ha van két CF nyelvtan, akkor az általuk generált nyelveknek ugyanaz-e a rendtípusa?

Pl. $X \rightarrow 1X \mid 1$ és $Y \rightarrow 10Y \mid 1$ mindketten ω típusú nyelvet generálnak.

- A kérdés általában véve **eldönthetetlen**: bizonyíthatóan nem létezik rá algoritmus
- Az eldönthető, hogy a generált nyelv **jólrendezett**-e vagy **szétszórt**-e
- Ha jólrendezett és minden változó „prefixmentes nyelvet” generál, akkor a rendtípus Cantor normálformája is kiszámítható (és ezért az izomorfizmus eldönthető)
- Ha a rendtípus ω , $(-\omega)$ és 1 tagok véges összege (azaz: szétszórt és legfeljebb 1 a „rangja”), akkor kiszámítható

Izomorfizmus

- Nem tudjuk, hogy jólrendezett CF nyelvek rendtípusának Cantor normálformája kiszámítható-e általában
- Nem tudjuk, hogy szétszórt CF rendtípusok izomorfizmus problémája eldönthető-e
- Nem tudjuk, hogy a „környezetfüggő” rendszámoknak mi a felső korlátja
 - környezetfüggő: olyan átírási szabályokat engedünk meg, melyekben a bal oldalon is állhat tetszőleges string, azzal, hogy legyen benne legalább egy változó és ne legyen hosszabb a bal oldal, mint a jobb
 - az előző L nyelv pl. környezetfüggő

Hivatkozások

- R. Goodstein. On the Restricted Ordinal Theorem. *Journal of Symbolic Logic* 9(2), p. 33–41, 1944.
- L. Kirby, J. Paris. Accessible Independence Results for Peano Arithmetic. *Bulletin of the London Mathematical Society* 14(4), p.285, 1982.
- W. Thomas. On Frontiers of Regular Trees. *RAIRO Theoretical Informatics and Applications* 20, p. 371–381, 1986.
- S. L. Bloom, Z. Ésik. Algebraic Ordinals. *Fundamenta Informaticae* 99, p. 383–417, 2010.
- S. L. Bloom, Z. Ésik. Algebraic Linear Orderings. *Int. J. Foundations of Computer Science* 22(2), p. 491–515, 2011.
- Z. Ésik. An Undecidable Property of Context-Free Linear Orders. *Information Processing Letters* 111(3), p. 107–109, 2011.
- D. Kuske. Logical Aspects of the Lexicographic Order on 1-Counter Languages. *Proc. of MFCS 2019*, p. 619–630.
- K. Gelle, S. Iván. On the Order Type of Scattered Context-Free Orderings. *Proc. of GandALF 2019, EPTCS 305*, p. 169–182, 2019.
- K. Gelle, S. Iván. The Ordinal Generated by an Ordinal Grammar is Computable. *Theoretical Computer Science* 793, p. 1–13, 2019.
- K. Gelle, S. Iván. The order type of scattered context-free orderings of rank one is computable. Manuscript, arXiv.

Supported by the János Bolyai Scholarship of the Hungarian Academy of Sciences. Az előadás az Innovációs és Technológiai Minisztérium UNKP-19-4-SZTE-22 kódszámú Új Nemzeti Kiválóság Programjának szakmai támogatásával készült.