Klózformára hozás

(1) $\leftrightarrow, \rightarrow$ kiküszöbölése

(2) $\neg$ bevitele a predikátumok elé ($\neg\exists x F(x) \equiv \forall x \neg F(x)$, $\neg\forall x F(x) \equiv \exists x \neg F(x) \ldots$)

(3) változók átnevezése $\rightsquigarrow$ minden egyes kvantorra az ő hatáskörébe tartozó változó neve egyedi legyen

(4) kvantorok kiemelése a formula elejére **sorrendjük megtartása mellett**

(5) "$\exists$" kvantorok kiküszöbölése (skolemizáció):

$$\forall x_1 \ldots \forall x_k \exists y Q_1 z_1 \ldots Q_r z_r F(x_1, \ldots, x_k, y, z_1, \ldots, z_r)$$

formulát (ahol $Q_1, \ldots, Q_r$ a "$\exists$" és a "$\forall$" kvantorok bármelyike lehet) helyettesítjük a

$$\forall x_1 \ldots \forall x_k Q_1 z_1 \ldots Q_r z_r F(x_1, \ldots, x_k, f(x_1, \ldots, x_k), z_1, \ldots, z_r)$$

formulával, ahol f egy **új** függvényszimbólum (speciálisan $k = 1$ esetén: konstansszimbólum).

(6) prefixum (azaz a "$\forall$" kvantorok) elhagyása

(7) formulából KNF előállítása (disztributivitást felhasználva)

(8) formula felszabdalása $\wedge$-ek mentén $\rightsquigarrow$ klózhalmaz

(9) változók átnevezése $\rightsquigarrow$ egy változó legfeljebb egy klózban szerepeljen

Példa

$$\begin{array}{rl}
F_1: & \forall x \forall y \Big(\Big[\mathrm{s}(x,y) \vee \exists z \big(\mathrm{s}(x,z) \wedge \mathrm{o}(z,y) \big) \Big] \rightarrow \mathrm{o}(x,y) \Big) \\
F_2: & \forall x \exists y \big(\mathrm{s}(y,x) \big) \\
F_3: & \forall x \forall y \big(\big[\exists z \big(\mathrm{s}(x,z) \wedge \mathrm{s}(y,z) \big) \big] \rightarrow \neg \mathrm{o}(x,y) \big) \\
\hline
K: & \forall x \exists y \big(\mathrm{o}(y,x) \wedge \neg \mathrm{s}(y,x) \big)
\end{array}$$

Bevezetve az $F_4 = \neg K$ jelölést, a fenti összefüggés nyilván pontosan akkor áll fenn, ha az $F = F_1 \wedge F_2 \wedge F_3 \wedge \neg K = F_1 \wedge F_2 \wedge F_3 \wedge F_4$ formula kielégíthetetlen. Annak érdekében, hogy jobban követhető legyen F

átalakításának folyamata, a lentiek során bizonyos lépéseket külön-külön végzünk el a különböző részformulákon. Ez egyedül a (3) lépés végrehajtásánál okozhat gondot, amit például úgy kerülhetünk el, hogy előre rögzítjük, hogy egy F_i átalakítása során a benne szereplő változókhoz alsó indexbe i-t írunk.

$$\begin{aligned}
F_1 &\overset{(1)}{\rightsquigarrow} \forall x \forall y \Big(\neg \Big[\mathrm{s}(x,y) \vee \exists z \big(\mathrm{s}(x,z) \wedge \mathrm{o}(z,y) \big) \Big] \vee \mathrm{o}(x,y) \Big) \\
&\overset{(2)}{\rightsquigarrow} \forall x \forall y \Big(\Big[\neg \mathrm{s}(x,y) \wedge \forall z \big(\neg \mathrm{s}(x,z) \vee \neg \mathrm{o}(z,y) \big) \Big] \vee \mathrm{o}(x,y) \Big) \\
&\overset{(3)}{\rightsquigarrow} \forall x_1 \forall y_1 \Big(\Big[\neg \mathrm{s}(x_1,y_1) \wedge \forall z_1 \big(\neg \mathrm{s}(x_1,z_1) \vee \neg \mathrm{o}(z_1,y_1) \big) \Big] \vee \mathrm{o}(x_1,y_1) \Big) \\
&\overset{(4)}{\rightsquigarrow} \forall x_1 \forall y_1 \forall z_1 \Big(\Big[\neg \mathrm{s}(x_1,y_1) \wedge \big(\neg \mathrm{s}(x_1,z_1) \vee \neg \mathrm{o}(z_1,y_1) \big) \Big] \vee \mathrm{o}(x_1,y_1) \Big) \\
&\overset{(6)}{\rightsquigarrow} \Big(\Big[\neg \mathrm{s}(x_1,y_1) \wedge \big(\neg \mathrm{s}(x_1,z_1) \vee \neg \mathrm{o}(z_1,y_1) \big) \Big] \vee \mathrm{o}(x_1,y_1) \Big) \\
&\overset{(7)}{\rightsquigarrow} \Big(\big[\neg \mathrm{s}(x_1,y_1) \vee \mathrm{o}(x_1,y_1) \big] \wedge \big[\neg \mathrm{s}(x_1,z_1) \vee \neg \mathrm{o}(z_1,y_1) \vee \mathrm{o}(x_1,y_1) \big] \Big) =: F_1',
\end{aligned}$$

$$F_2 \overset{(3)}{\rightsquigarrow} \forall x_2 \exists y_2 \big(\mathrm{s}(y_2,x_2) \big) \overset{(5)}{\rightsquigarrow} \forall x_2 \big(\mathrm{s}(f(x_2),x_2) \big) \overset{(6)}{\rightsquigarrow} \big(\mathrm{s}(f(x_2),x_2) \big) =: F_2',$$

$$\begin{aligned}
F_4 &\overset{(2)}{\rightsquigarrow} \exists x \forall y \big(\neg \mathrm{o}(y,x) \vee \mathrm{s}(y,x) \big) \\
&\overset{(3)}{\rightsquigarrow} \exists x_4 \forall y_4 \big(\neg \mathrm{o}(y_4,x_4) \vee \mathrm{s}(y_4,x_4) \big) \\
&\overset{(5)}{\rightsquigarrow} \forall y_4 \big(\neg \mathrm{o}(y_4,a) \vee \mathrm{s}(y_4,a) \big) \\
&\overset{(6)}{\rightsquigarrow} \big(\neg \mathrm{o}(y_4,a) \vee \mathrm{s}(y_4,a) \big) =: F_4',
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_3' &\overset{(1)}{\rightsquigarrow} \forall x \forall y \big(\neg \big[\exists z \big(\mathrm{s}(x,z) \wedge \mathrm{s}(y,z) \big) \big] \vee \neg \mathrm{o}(y,x) \big) \\
&\overset{(2)}{\rightsquigarrow} \forall x \forall y \big(\big[\forall z \big(\neg \mathrm{s}(x,z) \vee \neg \mathrm{s}(y,z) \big) \big] \vee \neg \mathrm{o}(y,x) \big) \\
&\overset{(3)}{\rightsquigarrow} \forall x_3 \forall y_3 \big(\big[\forall z_3 \big(\neg \mathrm{s}(x_3,z_3) \vee \neg \mathrm{s}(y_3,z_3) \big) \big] \vee \neg \mathrm{o}(y_3,x_3) \big) \\
&\overset{(4)}{\rightsquigarrow} \forall x_3 \forall y_3 \forall z_3 \big(\big[\big(\neg \mathrm{s}(x_3,z_3) \vee \neg \mathrm{s}(y_3,z_3) \big) \big] \vee \neg \mathrm{o}(y_3,x_3) \big) \\
&\overset{(6)}{\rightsquigarrow} \big(\neg \mathrm{s}(x_3,z_3) \vee \neg \mathrm{s}(y_3,z_3) \vee \neg \mathrm{o}(y_3,x_3) \big) =: F_3''.
\end{aligned}$$

A fenti átalakítások során elhagyott lépések láthatóan nem relevánsak az adott formulák esetén. Az így előállt $F_1' \wedge F_2' \wedge F_3' \wedge F_4'$ formulából a (8) illetve (9) lépések végrehajtásával előálló klózhalmazon (melynek során F_1 formulát kettébontva létrehoztuk a C_1 és C_5 klózokat) már végrehajthatjuk a rezolúciót.

Név	ős 1	ős 2	egyesítő	klóz
C_1				$\neg \mathrm{s}(x_1, y_1) \vee \mathrm{o}(x_1, y_1)$
C_2				$\mathrm{s}(f(x_2), x_2)$
C_3				$\neg \mathrm{s}(x_3, z_3) \vee \neg \mathrm{s}(y_3, z_3) \vee \neg \mathrm{o}(y_3, x_3)$
C_4				$\neg \mathrm{o}(y_4, a) \vee \mathrm{s}(y_4, a)$
C_5				$\neg \mathrm{s}(x_5, z_5) \vee \neg \mathrm{o}(z_5, y_5) \vee \mathrm{o}(x_5, y_5)$
C_6	C_5	C_4	$\{y_4/x_5, y_5/a\}$	$\neg \mathrm{s}(x_6, z_6) \vee \neg \mathrm{o}(z_6, a) \vee \mathrm{s}(x_6, a)$
C_7	C_6	C_1	$\{x_1/z_6, y_1/a\}$	$\neg \mathrm{s}(x_7, z_7) \vee \mathrm{s}(x_7, a) \vee \neg \mathrm{s}(z_7, a)$
C_8	C_7	C_2	$\{x_2/a, z_7/f(a)\}$	$\neg \mathrm{s}(x_8, f(a)) \vee \mathrm{s}(x_8, a)$
C_9	C_8	C_2	$\{x_2/f(a), x_8/f(f(a))\}$	$\mathrm{s}(f(f(a)), a)$
C_{10}	C_9	C_3	$\{y_3/f(f(a)), z_3/a\}$	$\neg \mathrm{s}(x_{10}, a) \vee \neg \mathrm{o}(f(f(a)), x_{10})$
C_{11}	C_{10}	C_2	$\{x_2/a, x_{10}/f(a)\}$	$\neg \mathrm{o}(f(f(a)), f(a))$
C_{12}	C_{11}	C_1	$\{x_1/f(f(a)), y_1/f(a)\}$	$\neg \mathrm{s}(f(f(a)), f(a))$
C_{13}	C_{12}	C_2	$\{x_2/f(a)\}$	$\square$

Megjegyzés: a rezolúciós bizonyításból visszafejthető ($x_8/f(f(a))$ és y_4/x_4 alapján), hogy egy x-re $f(f(x))$ mindig egy olyan őse lesz x-nek, mely nem szülője. Ez az a módszer, amit a logikai programozás is használ — ezen az elven működik tehát például a PROLOG is.