

4. Absztrakt adatszerkezetek

Absztrakt adatszerkezet egy $A = (M, R, Adat)$ rendezett hármas, ahol

1. M az absztrakt memóiahelyek, *cellák* halmaza.
2. $R = \{r_1, \dots, r_k\}$ a cellák közötti *szerkezeti kapcsolatok*.
3. $Adat$ a cellák adattartalmát megadó (parciális) függvény, $c \in M$ esetén $Adat(c)$ a c cellában lévő adat.

Jelölések:

$f : A \rightarrow B$ parciális függvény esetén, ha $x \in A$ elemre f nem értelmezett, akkor az $f(x) = \perp$ jelölést alkalmazzuk, tehát mint ha $f : A \rightarrow B \cup \{\perp\}$ mindenütt értelmezett (totális) függvény lenne.

$f : E \rightarrow E$ függvény és $k \geq 0$ esetén f^k az f függvény k -adik *iteráltja*:

$$f^0(x) = x,$$

$$f^{k+1}(x) = f(f^k(x)).$$

Legyen $f : H \rightarrow H$ tetszőleges (parciális) függvény. Az f függvény *gráfja* az a $G_f = (H, E_f)$ gráf, ahol

$$E_f = \{(x, f(x)) : x \in H \wedge f(x) \neq \perp\}.$$

H (véges) halmaz elemeiből képzett (véges) sorozatok halmazát H^* -al jelöljük, azaz

$$H^* = \{\langle x_1, \dots, x_n \rangle : x_i \in H, i = 1, \dots, n, 0 \leq n\},$$
 az üres sorozatra a λ jelölést is használjuk.

$\langle x_1, \dots, x_n \rangle \in H^*$ esetén a sorozatot $x_1.x_2 \dots x_n$ alakban is írhatjuk, tehát elhagyjuk a zárójeleket és az elemeket $\cdot$ (pont) választja el.

4.1. Lánc

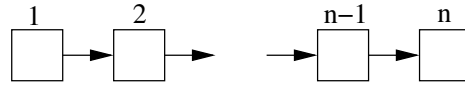
$A = (M, R, Adat)$ lánc, ha $R = \{követ\}$,

$követ : M \rightarrow M$ parciális függvény, amelyre teljesül:

$$(\exists f e j \in M)(\forall x \in M)(\exists ! k \geq 0)(x = követ^k(f e j)) \quad (1)$$

Nyilvánvalóan pontosan egy olyan $c \in M$ cella van, amelyre $követ(c) = \perp$, ezt *láncvégnak* nevezzük.

A lánc hosszán a cellák n számát értjük. Ha $n > 0$, akkor $követ^{(n-1)}(f e j) = \text{láncvég}$



1. ábra. Lánc absztrakt adatszerkezet szemléltetése.

Az $A = (M, R, Adat)$ lánc *rendezett lánc* a $\leq$ relációra nézve, ha

$$(\forall x \in M)(Adat(x) \leq Adat(követ(x)))$$

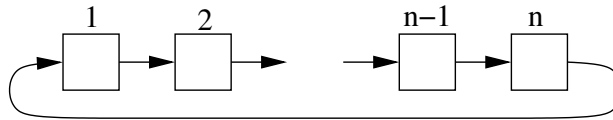
4.2. Körlánc

$A = (M, R, Adat)$ körlánc, ha $R = \{követ\}$,

$követ : M \rightarrow M$ (totális) függvény, amelyre teljesül:

$$(\forall x, y \in M)(\exists k \geq 0)(y = követ^k(x)) \quad (2)$$

A (2) feltétel nyilvánvalóan egyenértékű azzal, hogy bármely $x \in M$ -re az $\langle x = x_0, x_1, \dots, x_{n-1} \rangle$ sorozat, ahol $x_i = követ(x_{i-1}), i =$



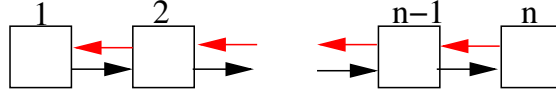
2. ábra. Körlánc absztrakt adatszerkezet szemléltetése.

$1, \dots, n-1$, az M halmaz elemeinek egy ciklikus permutációja.

4.3. Kétirányú lánc

$\mathbb{A} = (M, R, Adat)$ kétirányú lánc, ha $R = \{követ, előz\}$,
 $követ, követ : M \rightarrow M$ (parciális) függvény, hogy:
 $R' = \{követ\}$ és $R'' = \{előz\}$ mindegyike lánc, és

$$(\forall x \in M)(x = előz(követ(x)) \wedge x = követ(előz(x))) \quad (3)$$

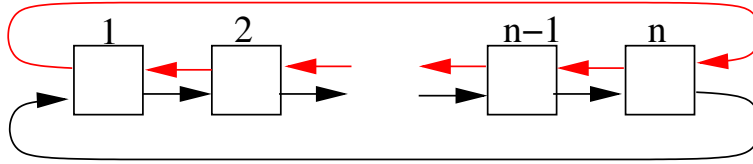


3. ábra. Kétirányú lánc absztrakt adatszerkezet szemléltetése.

4.4. Kétirányú körlánc

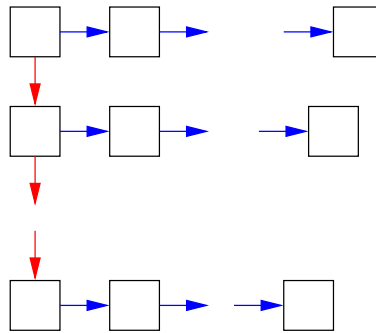
$\mathbb{A} = (M, R, Adat)$ kétirányú körlánc, ha $R = \{követ, előz\}$,
 $követ, követ : M \rightarrow M$ (totális) függvény, hogy:
 $R' = \{követ\}$ és $R'' = \{előz\}$ mindegyike körlánc, és

$$(\forall x \in M)(x = előz(követ(x)) \wedge x = követ(előz(x))) \quad (4)$$



4. ábra. Kétirányú körlánc absztrakt adatszerkezet szemléltetése.

4.5. 2-dimenziós lánc

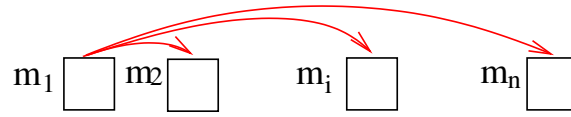


5. ábra. 2-dimenziós lánc absztrakt adatszerkezet szemléltetése.

$\mathbb{A} = (M, R, Adat)$ 2-dimenziós lánc, ha $R = \{csat1, csat2\}$,

$$(\exists fej \in M)(\forall x \in M)(\exists! i, j \geq 0) \\
(x = csat2^j(csat1^i(fej))) (\forall x \in M)(csat1(x) \neq \perp \Rightarrow (\exists i)(x = csat1^i(fej)))$$

4.6. Tömb

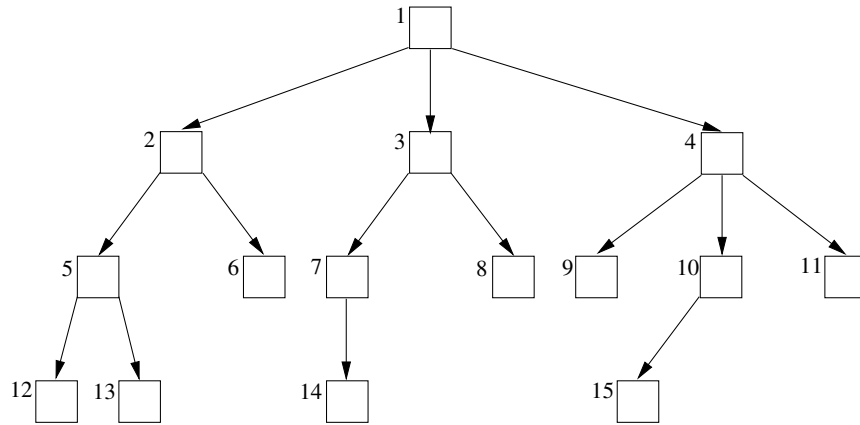


6. ábra. Tömb absztrakt adatszerkezet szemléltetése.

$A = (M, R, Adat)$ tömb, ha $R = \{ind\}$,
 $ind : M \rightarrow M^n, n = |M|$
 $(\exists m_1 \in M)(ind(m_1) = \langle m_1, m_2, \dots, m_n \rangle)$ M elemeinek egy permutációja, és ha $m_1 \neq p \in M \Rightarrow ind(p) = \perp$
 Másképpen fogalmazva, Tömb megadható olyan $ind : \{1, \dots, |M|\} \rightarrow M$ függvénnyel, hogy

$$(\forall i, j)(1 \leq i < j \leq |M| \Rightarrow ind(i) \neq ind(j))$$

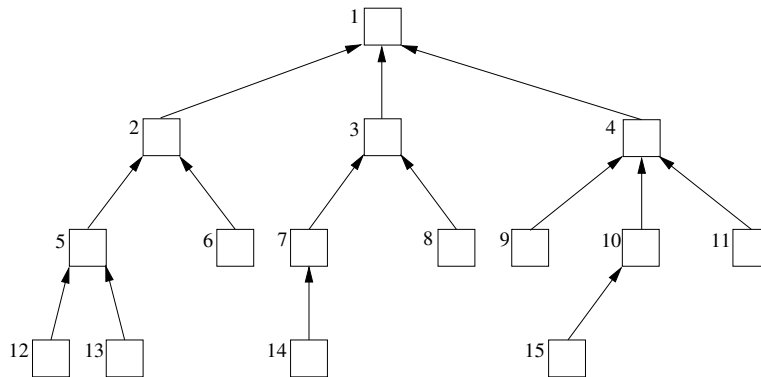
4.7. Fa



7. ábra. Fa absztrakt adatszerkezet szemléltetése.

$A = (M, R, Adat)$ nem-rendezett fa, ha $R = \{r\}$, $r \subseteq M \times M$ bináris reláció, és van olyan $g \in M$, hogy a $G = (M, r)$ irányított gráfban bármely $x \in M$ -re pontosan egy $g \rightsquigarrow x$ út vezet. g -t a fa gyökerének nevezzük. Vegyük észre, hogy ha a fenti ábrán minden él irányát megfordítjuk, akkor egy olyan $f : M \rightarrow M$ parciális függvény gráfját kapjuk, amely csak g -re nincs értelmezve, és f körmentes.

Fordítva is igaz, minden olyan $f : M \rightarrow M$ parciális függvény, amely pontosan egy $g \in M$ -re nem definiált, a függvény gráfjának



8. ábra. Fa adatszerkezet megadása fiú-apa kapcsolattal.

transzponáltja,

$$\{(f(x), x) : x \in M \wedge f(x) \neq \perp\} \subseteq M \times M \quad (5)$$

szerkezeti kapcsolat nem-rendezett fát definiál. Tehát minden nem-rendezett fa egyértelműen megadható egy olyan $Apa : M \rightarrow M$ parciális függvénnyel, amelyre teljesül a következő feltétel.

$$(\exists g \in M)((Apa(g) = \perp) \wedge (\forall x \in M)(\exists! k \geq 0)(Apa^k(x) = g)) \quad (6)$$

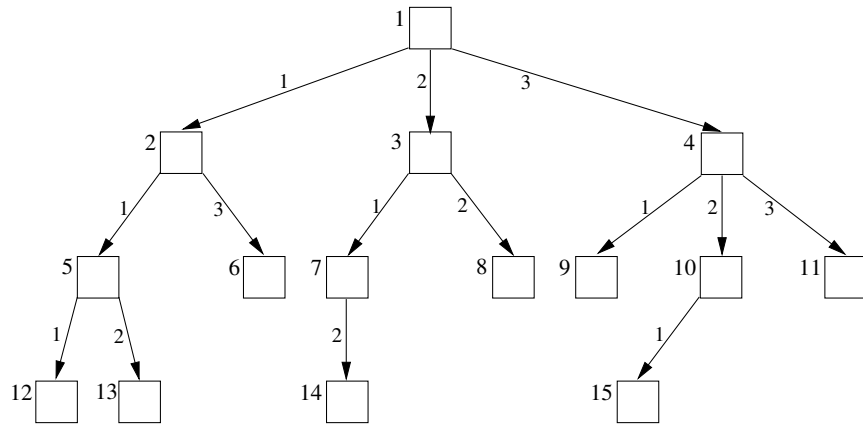
Ha $y = Apa(x)$, akkor azt mondjuk, hogy x *apja* y és y -nak *fia* x .

Az így megadott szerkezeti kapcsolat nem definiál rendezettséget adott x cella $\{y : Apa(y) = x\}$ fiainak halmazán.

Gyakran szükség van olyan szerkezeti kapcsolatra, ahol a fiúk sorrendje is lényeges. Továbbá, előfordulhat, hogy egy cellának lehetne i -edik fia, de ez a kapcsolat hiányzik.

Például, a következő ábrán olyan fa látható, amelynél a fiúk sorrendjét is megadtuk. A 2. cellának két fia van, de ezek az 1. és 3. sorszámúak, és a 2. fiú hiányzik.

Legyen $A = (M, R, Adat)$ olyan absztrakt adatszerkezet, hogy $R = \{f\}$, $f : M \rightarrow (M \cup \{\perp\})^*$.



9. ábra. Fa absztrakt adatszerkezet hiányzó kapcsolattal.

$x \in M$, $f(x) = \langle y_1, \dots, y_k \rangle$, $y_i \in M \cup \{\perp\}$, $i = 1, \dots, k$.

Minden $i > 0$ természetes számra definiáljuk az $f_i : M \rightarrow M \cup \{\perp\}$ függvényt a következőképpen:

$$f_i(x) = \begin{cases} y_i & \text{ha } f(x) = \langle y_1, \dots, y_k \rangle \text{ és } i \leq k \\ \perp & \text{ha } i > k \end{cases} \quad (7)$$

Tehát $f_i(x)$ az x i -edik fiát adja. Ha $f_i(x) = \perp$, akkor hiányzik az i -edik fiú. Az A adatszerkezetet fának nevezzük, ha van olyan $g \in M$, hogy teljesül az alábbi négy feltétel:

$$(\forall x \in M)(\forall i)(g \neq f_i(x)) \quad (8)$$

$$(\forall y \neq g \in M)(\exists x \in M)(\exists i)(f_i(x) = y) \quad (9)$$

$$(\forall x, y \in M)(\forall i, j)(f_i(x) = f_j(y) \Rightarrow (x = y \wedge i = j)) \quad (10)$$

$$(\forall x \neq g \in M)(\exists i_1, \dots, i_k)(x = f_{i_k} \dots f_{i_1}(g)) \quad (11)$$

A (8) feltétel azt fejezi ki, hogy a gyökér nem fia egyetlen pontnak sem.

A (9) feltétel szerint minden, gyökértől különböző pont fia valamely pontnak.

A (10) feltétel azt mondja, hogy minden pontnak legfeljebb egy apja lehet.

A (11) feltétel azt mondja, hogy minden pont elérhető a gyökérből.

Mivel M véges halmaz, ezért a 2. és 3. feltételből következik, hogy bármely ponthoz pontosan egy út vezet a gyökértől.

Mivel minden cellához pontosan egy út vezet a gyökértől, ezért a cellák azonosíthatók a hozzájuk vezető (egyetlen) úttal. Például, a 13. cella az 1.1.2 a 15. a 3.2.1 sorozattal azonosítható. Tehát egy fát megadhatunk úgy is, hogy megadjuk minden pontjához vezető utat. Legyen $F \subseteq \mathbb{N}^*$. Azt mondjuk, hogy F *fatartomány*, ha F zárt a prefix képzésre, azaz

$$(\forall p \in \mathbb{N}^*)(\forall i \in \mathbb{N})(p.i \in F \Rightarrow p \in F) \quad (12)$$

A definícióból következik, hogy a λ üres sorozat eleme F -nek, ami az F fa gyökere.

F a szerkezeti kapcsolatot is definiálja a következőképpen:

$$\{(p, p.i) : p, p.i \in F \wedge i \in \mathbb{N}\}$$

Fákkal kapcsolatos definíciók és jelölések

Legyen $F \subseteq \mathbb{N}^*$ fatartomány (fa), $p, q \in F$ és $i, j \in \mathbb{N}$.

F pontjainak száma $|F|$, azaz az F halmaz számossága.

Ha $q = p.i \in F$, akkor a q pont i -edik fia p -nek és p apja q -nak.

A p pont fok a fiainak száma, azaz $fok(p) = |\{k : p.k \in F\}|$.

Ha $p.i \in F \wedge p.j \in F$ akkor $p.i$ és $p.j$ testvérek.

Pontosabban, ha $i < j$ akkor $p.i$ bal-testvére $p.j$ -nek és $p.j$ jobb-testvére $p.i$ -nek.

Ha $j = i + 1$ akkor $p.j$ közvetlen jobb-testvére $p.i$ -nek és $p.i$ közvetlen bal-testvére $p.j$ -nek.

A q pont leszármazottja p -nek, ha van olyan $u \in \mathbb{N}^*$, hogy $q = p.u$.

A q pont őse p -nek, ha van olyan $u \in \mathbb{N}^*$, hogy $p = q.u$.

A p pont levél pont, ha nincs fia, azaz $(\forall k \in \mathbb{N})(p.k \notin F)$.

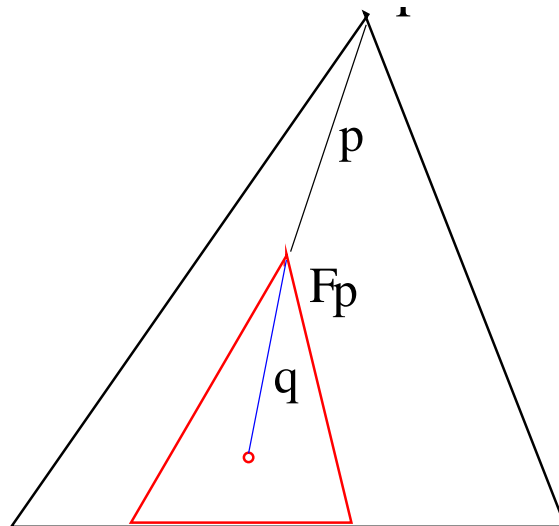
Ha $p.i \notin F$ de van olyan $j \in \mathbb{N}$, hogy $i < j$ és $p.j \in F$, akkor azt mondjuk, hogy p -nek hiányzik az i -edik fia.

F p -gyökerű részfa: $F_p = \{q \in \mathbb{N}^* : p.q \in F\}$.

p mélysége az F fában a gyöktől p -ig vezető út pontjainak száma; $d(p) = |p| + 1$.

Az F fa magassága; $h(F) = 0$, ha $F = \emptyset$, egyébként $h(F) = \max(d(p) : p \in F)$.

Rendezett fa megadható úgy is, hogy minden gyöktől különböző p pontjára megadjuk a q apját, és azt, hogy p az apjának hányad-



10. ábra. Az F fa p gyökerű részfa.

dik fia. Tehát ekkor a szerkezeti kapcsolat egy $f : M \rightarrow M \times \mathbb{N}$ parciális függvény lesz, amely pontosan egy $g \in M$ -re definiálatlan.

Ha $f(p) = (q, i)$, akkor p apja q és p az apjának i -edik fia.

(Gyakorlat: milyen feltételek mellett lesz f fa?)

Rendezett fa megadható úgy is, hogy minden pontra megadjuk az első fiát, ha van, és minden pontra megadjuk a jobb testvérét, ha van. Ezt *elsőfiú-testvér* kapcsolati ábrázolásnak nevezzük.

A példánkban szereplő fa ekkor a következőképpen ábrázolható:

Fa megadása *elsőfiú-testvér* kapcsolattal.

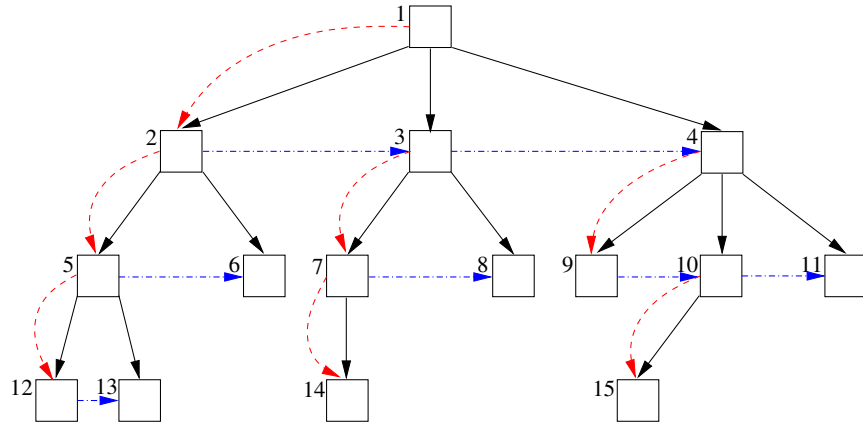
Legyen $\mathbb{A} = (M, R, Adat)$ olyan absztrakt adatszerkezet, hogy $R = \{e, t\}$, $e, t : M \rightarrow (M \cup \{\perp\})$.

Legyen $f_i(x) = t^{i-1}(e(x))$ $i > 0$.

Az $\mathbb{A}$ adatszerkezet fa, ha az f_i függvények teljesítik a (8) - (11). feltételeket.

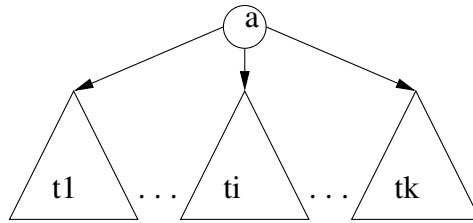
Fák algebrai definíciója.

Legyen E tetszőleges adathalmaz. Az E -feletti fák $Fa(E)$ halmaza az a legszűkebb halmaz, amelyre teljesül az alábbi három feltétel:



11. ábra. Fa megadása elsőfiú-testvér kapcsolattal.

1. $\perp \in Fa(E)$
2. $(\forall a \in E) a \in Fa(E)$
3. $(\forall a \in E)(\forall t_1, \dots, t_k \in Fa(E))(a(t_1, \dots, t_k) \in Fa(E))$



12. ábra. Fa algebrai megadásának szemléltetése.

4.8. Gráf

Az $\mathbb{A} = (M, R, Adat)$ adatszerkezet (irányított) gráf, ha R egyetlen bináris relációt tartalmaz, azaz $R = \{r\}$, $r \subseteq M \times M$. Ekkor az r szerkezeti kapcsolat megadható azzal az $f_r : M \rightarrow 2^M = \{H : H \subseteq M\}$ függvénnyel, ahol $f_r(x) = \{y : (x, y) \in r\}$. Az $f_r(x)$ halmaz elemeit az x szomszédjainak nevezzük.

4.9. Általános absztrakt adatszerkezet

Olyan $\mathbb{A} = (M, R, Adat)$ rendezett hármas, ahol

1. M az absztrakt memóiahelyek, *cellák* halmaza.
2. $R = \{r_1, \dots, r_k\}$ a cellák közötti *szerkezeti kapcsolatok*, $r_i : M \rightarrow (M \cup \{\perp\})^*$
3. $Adat : M \rightarrow E$ parciális függvény, a cellák adattartalma.

$x \in M$, $r \in R$ és $r(x) = \langle y_1, \dots, y_i, \dots, y_k \rangle$ esetén az x cella r kapcsolat szerinti szomszédjai $\{y_1, \dots, y_k\}$, y_i pedig az x cella i -edik szomszédja.

Ha $y_i = \perp$, akkor azt mondjuk, hogy x -nek hiányzik az r szerinti i -edik szomszédja.

Különbségek a gráf és általános absztrakt adatszerkezetek között.

1. A gráf csak egy szerkezeti kapcsolatot ad meg.
2. Gráf esetén a szomszédok halmaza nem rendezett.
3. Gráfban nem tudunk hiányzó kapcsolatot megadni.