18. Függvények rekurzív megadása, a mester módszer

Algoritmusok futási idejének számítása gyakran vezet rekurzív egyenlethez, különösen akkor, ha az algoritmus rekurzív. Tekintsük például ha az összefésülő rendezés alábbi algoritmusát.

```
OSSZEFESULO-RENDEZES(A, bal, jobb);
Begin
  If bal < jobb Then Begin
    kozep:=(bal+jobb) div 2;
    OSSZEFESULO-RENDEZES(A, bal, kozep);
    OSSZEFESULO-RENDEZES(A, kozep, jobb);
    OSSZEFESUL(A, bal,kozep, jobb);
  End
End;{Osszefesulo-rendezes}
```

18.1. Oszd-meg-és-uralkodj elvű algoritmusok elemzése

Jelölje $T(n)$ az n-méretű bemenetre a futási időt. Tegyük fel, hogy egy oszd-meg-és-uralkodj elvű algoritmus a kimenetet közvetlenül kiszámítja, ha $n < c$ v.m. c konstansra, egyébként a bemenetet a darab részre osztja, amelyek mindegyikének mérete n/b és ezeket a részfeladatokat rekurzívan oldja meg. Ha $D(n)$ idő kell a részekre osztáshoz, és egy (n-méretű) bemenetre az részproblémák megoldásaiból $C(n)$ időben tudja összerakni a kiindulási feladat megoldását, akkor a futási időre az alábbi rekurzív egyenlőséget kapjuk.

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(1) & \text{ha } n \leq c \text{ ,} \\ aT(n/b) + D(n) + C(n) & \text{egyébként .} \end{cases}$$

Az összefésülő rendezés esetén $a = 2$ és $D(n) = \Theta(1)$, továbbá az összefésülés elvégezhető lineáris időben, így $C(n) = \Theta(n)$ tehát

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(1) & \text{ha } n = 1 \text{ ,} \\ 2T(n/2) + \Theta(n) & \text{ha } n > 1 \text{ .} \end{cases} \tag{1}$$

Írjuk át az (1) egyenletet a következő alakra.

$$T(n) = \begin{cases} c & \text{ha } n = 1 \text{ ,} \\ 2T(n/2) + cn & \text{ha } n > 1 \text{ .} \end{cases} \tag{2}$$

A következő ábrán látható rekurziós fa alapján azt kapjuk, hogy $T(n) = \Theta(n \lg n)$

18.2. Helyettesítő módszer

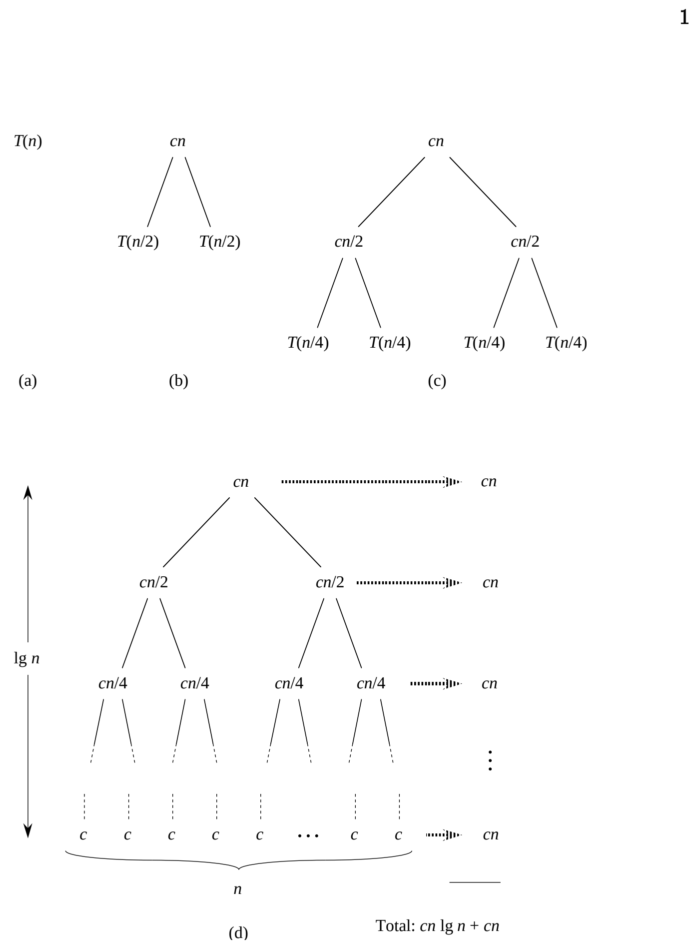
Rekurzív egyenlet megoldásának helyettesítő módszere két lépésből áll:
1. Sejtsük meg a megoldást.
2. Teljes indukcióval határozzul meg a konstansokat és igazoljuk a megoldás helyességét.
Példaként határozzuk meg a

$$T(n) = 2T(\lfloor n/2 \rfloor) + n \tag{3}$$

egyenlet egy felső korlátját. Sejtésünk az, hogy $T(n) = O(n \lg n)$. Megmutatjuk, hogy alkalmas $c > 0$ konstansra $T(n) \leq cn \lg n$. Tegyük fel, hogy $\lfloor n/2 \rfloor$-re teljesül a bizonyítandó, vagyis $T(\lfloor n/2 \rfloor) \leq c \lfloor n/2 \rfloor \lg(\lfloor n/2 \rfloor)$. Ezt behelyettesítve a rekurzív egyenletbe kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} T(n) &\leq 2(c \lfloor n/2 \rfloor \lg(\lfloor n/2 \rfloor)) + n \\ &\leq cn \lg(n/2) + n \\ &= cn \lg n - cn \lg 2 + n \\ &= cn \lg n - cn + n \\ &\leq cn \lg n \text{ ,} \end{aligned}$$

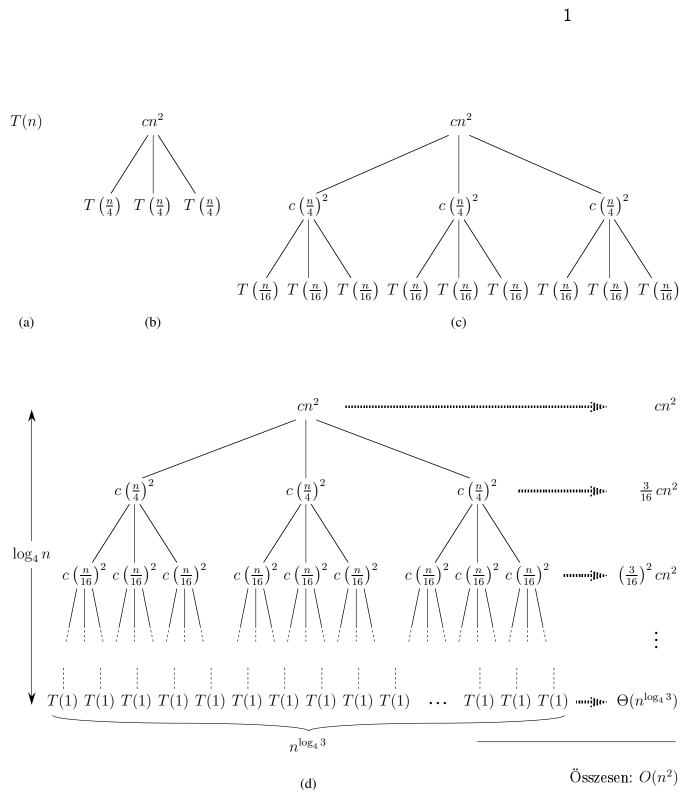
ahol az utolsó lépés akkor igaz, ha $c \geq 1$.



1. ábra. Az összefésülő rendezés rekurziós fája.

18.3. A rekrziós fa módszer

A **rekurziós fa** olyan fa, amelynek minden pontja egy eljáráshívást jelent adott aktuális paraméterekre, úgy, hogy a pont fiai megfelelnek azoknak az eljáráshívásoknak, amelyek végrehajtódnak az aktuális paraméterek esetén.
Szintenként összegezzük a pontok költségét, majd a szinteket összeadva kapjuk a teljes költséget.
Példaként rekurziós fa alkalmazásával oldjuk meg a $T(n) = 3T(\lfloor n/4 \rfloor) + \Theta(n^2)$ rekurziós egyenletet.



2. ábra. Rekurziós fa

Mivel a részproblémák mérete egyre csökken, ahogy egyre távolabb kerülünk a gyökértől, előbb-utóbb a részprobléma mérete olyan kicsi lesz, hogy rá nem a rekurziós képlet vonatkozik, hanem a kezdeti feltétel. Milyen messze leszünk ekkor a gyökértől? Az i-edik szinten lévő részprobléma mérete $n/4^i$, így a részprobléma mérete akkor lesz 1, ha $n/4^i = 1$, azaz ha $i = \log_4 n$. Tehát a fának $\log_4 n + 1$ szintje van, $(0, 1, 2, \ldots, \log_4 n)$.
Ezután meghatározzuk a fa minden szintjének költségét. Minden szinten háromszor annyi pont van, mint a felette lévő szinten, ezért az i-edik szinten 3^i pont van. A részproblémák mérete szintenként negyedére csökken, ezért minden szinten $i = 0, 1, 2, \ldots, \log_4 n - 1$-re a költség $c(n/4^i)^2$. Ezeket összegezve az összes pontra azt kapjuk, hogy az i-edik szinten lévő pontok költsége $i = 0, 1, 2, \ldots, \log_4 n - 1$-re $3^i c(n/4^i)^2 = (3/16)^i cn^2$. Az utolsó $\log_4 n$-edik szinten $3^{\log_4 n} = n^{\log_4 3}$ pont van, mindegyik

$T(1)$ költségű, tehát az utolsó szint költsége $n^{\log_4 3}T(1)$, ami $\Theta(n^{\log_4 3})$.
A teljes fára összegezve:

$$\begin{aligned} T(n) &= cn^2 + \frac{3}{16}cn^2 + \left(\frac{3}{16}\right)^2 cn^2 + \cdots + \left(\frac{3}{16}\right)^{\log_4 n-1} cn^2 + \Theta(n^{\log_4 3}) \\ &= \sum_{i=0}^{\log_4 n-1} \left(\frac{3}{16}\right)^i cn^2 + \Theta(n^{\log_4 3}) \\ &= \frac{(3/16)^{\log_4 n} - 1}{(3/16)-1} cn^2 + \Theta(n^{\log_4 3}) \ . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T(n) &= \sum_{i=0}^{\log_4 n-1} \left(\frac{3}{16}\right)^i cn^2 + \Theta(n^{\log_4 3}) \\ &< \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{3}{16}\right)^i cn^2 + \Theta(n^{\log_4 3}) \\ &= \frac{1}{1-(3/16)} cn^2 + \Theta(n^{\log_4 3}) \\ &= \frac{16}{13} cn^2 + \Theta(n^{\log_4 3}) \\ &= O(n^2) \ . \end{aligned}$$

Tehát a $T(n) = O(n^2)$ sejtést kaptuk a $T(n) = 3T(\lfloor n/4 \rfloor) + \Theta(n^2)$ rekurzív egyenletre. Ha $O(n^2)$ felső korlát, akkor erős felső korlát is egyben, mert az első rekurzív hívás költsége rögtön $\Theta(n^2)$, így $T(n) = \Theta(n^2)$. A $T(n) = O(n^2)$ sejtés helyességének igazolása helyettesítő módszerrel. Meg kell mutatni, hogy $T(n) \leq dn^2$ valamely $d > 0$ konstansra.

$$\begin{aligned} T(n) &\leq 3T(\lfloor n/4 \rfloor) + cn^2 \\ &\leq 3d\lfloor n/4 \rfloor^2 + cn^2 \\ &\leq 3d(n/4)^2 + cn^2 \\ &= \frac{3}{16} dn^2 + cn^2 \\ &\leq dn^2 \end{aligned}$$

Az utolsó egyenlőtlenség $d \geq (16/13)c$ esetén teljesül.

18.4. A mester módszer

A mester módszer a

$$T(n) = aT(n/b) + f(n) \tag{4}$$

típusú rekurzív egyenletek megoldására ad receptet, ahol $a \geq 1$ és $b > 1$ konstansok, továbbá $f(n)$ aszimptotikusan pozitív függvény.
A (4) képlet olyan rekurzív algoritmus futási idejét adja meg, amely n méretű feladatot a darab részproblémára bont, mindegyik mérete n/b, valamely a and b pozitív konstansokra és az a darab részproblémát rekurzívan oldja meg, mindegyiket $T(n/b)$ időben. A részproblémákra bontás és a részproblémák megoldásaiból a kiindulási probléma megoldásának összerakásának idejét a $f(n)$ függvény adja meg. (Tehát a korábbi $f(n) = D(n) + C(n)$.) például, a OSSZEFESULO-RENDEZES algoritmus esetén $a = 2$, $b = 2$, és $f(n) = \Theta(n)$.

A mester tétel

18.1. tétel. *(mester tétel.) Legyenek $a \geq 1$ és $b > 1$ konstansok, $f(n)$ függvény, $T(n)$ pedig a nemnegatív egészeken a*

$$T(n) = aT(n/b) + f(n)$$

rekurzív egyenlettel definiált függvény, ahol n/b jelentheti akár az $\lfloor n/b \rfloor$, akár a $\lceil n/b \rceil$ értéket. Ekkor $T(n)$-re a következő aszimptotikus korlátok adhatók.

1. *Ha $f(n) = O(n^{\log_b a-\varepsilon})$ valamely $\varepsilon > 0$ konstansra, akkor $T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$.*
2. *Ha $f(n) = \Theta(n^{\log_b a})$, akkor $T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \lg n)$.*
3. *Ha $f(n) = \Omega(n^{\log_b a+\varepsilon})$ valamely $\varepsilon > 0$ konstansra, és ha $af(n/b) \leq cf(n)$ valamely $c < 1$ konstansra és eléggé nagy n-re, akkor $T(n) = \Theta(f(n))$.*

Példák a mester módszer használatára.
Első példaként tekintsük a

$$T(n) = 9T(n/3) + n$$

rekurzív egyenletet. Ebben az esetben $a = 9$, $b = 3$, $f(n) = n$, tehát $n^{\log_b a} = n^{\log_3 9} = \Theta(n^2)$. Mivel $f(n) = O(n^{\log_3 9-\varepsilon})$, ahol $\varepsilon = 1$, ezért a mester tétel 1. esetét alkalmazhatjuk, és kapjuk a $T(n) = \Theta(n^2)$ megoldást. Másik példaként tekintsük a

$$T(n) = T(2n/3) + 1$$

egyenletet, ahol $a = 1$, $b = 3/2$, $f(n) = 1$. $n^{\log_b a} = n^{\log_{3/2} 1} = n^0 = 1$. A 2. esetet alkalmazhatjuk, mivel $f(n) = \Theta(n^{\log_b a}) = \Theta(1)$, tehát a megoldás $T(n) = \Theta(\lg n)$.

Harmadik példánk a

$$T(n) = 3T(n/4) + n\lg n$$

rekurzív egyenlet, ahol $a = 3$, $b = 4$, $f(n) = n\lg n$, és $n^{\log_b a} = n^{\log_4 3} = O(n^{0.793})$. Mivel $f(n) = \Omega(n^{\log_4 3+\varepsilon})$, ahol $\varepsilon \approx 0.2$, a 3. esetet alkalmazhatjuk, feltéve, hogy $f(n)$-re teljesül, hogy aszimptotikusan pozitív. Eléggé nagy n-re $af(n/b) = 3(n/4)\lg(n/4) \leq (3/4)n\lg n = cf(n)$ ahol $c = 3/4$, tehát $T(n) = \Theta(n\lg n)$.
A mester tétel bizonyítása.

18.5. A mester tétel bizonyítása egész kitevős hatványokra

18.2. lemma. *Legyenek $a \geq 1$ és $b > 1$ konstansok, $f(n)$ pedig legyen b egész kitevős hatványain értelmezett nemnegatív függvény. A $T(n)$ függvényt definiáljuk b egész kitevős hatványain a következő rekurzív egyenlettel.*

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(1) & \text{ha } n = 1\,, \\ aT(n/b) + f(n) & \text{ha } n = b^i\,, \end{cases}$$

ahol i pozitív egész. Ekkor

$$T(n) = \Theta(n^{\log_b a}) + \sum_{j=0}^{\log_b n-1} a^j f(n/b^j)\,. \tag{5}$$

Bizonyítás. A következő ábrán látható rekurziós fát használjuk a bizonyítás során. A fa gyökerének költsége $f(n)$ és a fia van, egyenként $f(n/b)$ költséggel. Minden fiúnak van a fia, egyenként $f(n/b^2)$ költséggel, tehát pontosan a^2 pont van a gyökértől 2 távolságra. Általánosan, pontosan a^j pont van a gyökértől j távolságra, mindegyik költsége $f(n/b^j)$. A levelek költsége egyenként $T(1) = \Theta(1)$ és mindegyik levél a $\log_b n$ szinten van, mivel $n/b^{\log_b n} = 1$. A fának összesen $a^{\log_b n} = n^{\log_b a}$ levele van. Ha összegezzük a szintek költségét, akkor az (5) egyenlethez jutunk. A j-edik szinten lévő pontok költsége $a^j f(n/b^j)$, így a belső pontok összköltsége

$$\sum_{j=0}^{\log_b n-1} a^j f(n/b^j)$$

A levelek összköltsége pedig $\Theta(n^{\log_b a})$ nagyságrendű, mert ennyi darab részprobléma van. ■

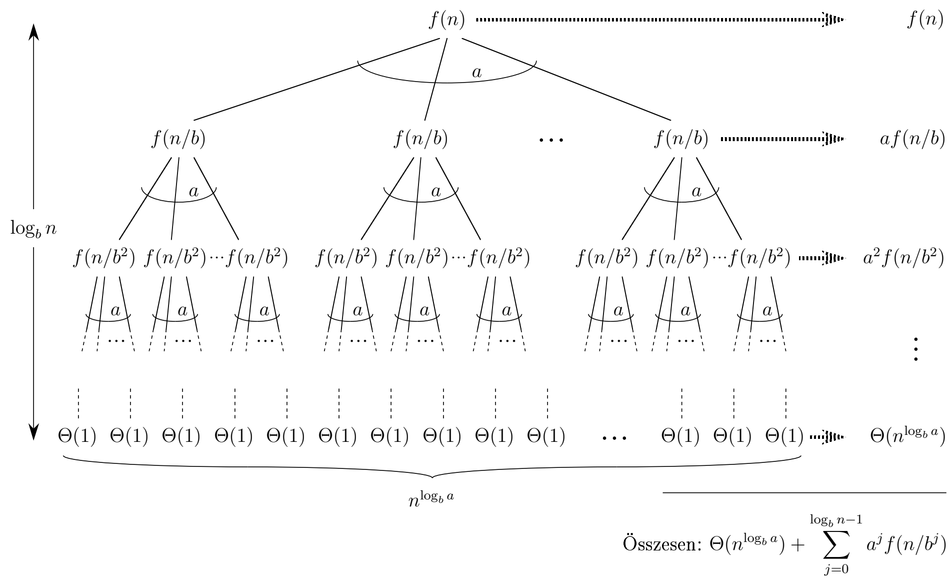
18.3. lemma. *Legyenek $a \geq 1$ és $b > 1$ konstansok, $f(n)$ pedig b egész kitevős hatványain értelmezett nemnegatív függvény. A $g(n)$ függvényt definiáljuk b egész kitevős hatványaira a következő rekurzív képlettel:*

$$g(n) = \sum_{j=0}^{\log_b n-1} a^j f(n/b^j) \tag{6}$$

Erre a függvényre b egész kitevői esetén a következő aszimptotikus korlátok érvényesek.

1. *Ha $f(n) = O(n^{\log_b a-\varepsilon})$ valamely $\varepsilon > 0$ konstansra, akkor $g(n) = O(n^{\log_b a})$.*

1



3. ábra. Rekurziós fa a mester tétel bizonyításához.

2. *Ha* $f(n) = \Theta(n^{\log_b a})$, *akkor* $g(n) = \Theta(n^{\log_b a} \lg n)$.

3. *Ha* $af(n/b) \le cf(n)$ *valamely* $c < 1$ *konstansra és minden* $n \ge b$ *esetén, akkor* $g(n) = \Theta(f(n))$.

Bizonyítás. Az 1. esetben $f(n) = O(n^{\log_b a - \varepsilon})$. Ebből következik, hogy $f(n/b^j) = O((n/b^j)^{\log_b a - \varepsilon})$. Ezt a (6) egyenlőségbe helyettesítve azt kapjuk, hogy

$$g(n) = O\left(\sum_{j=0}^{\log_b n - 1} a^j \left(\frac{n}{b^j}\right)^{\log_b a - \varepsilon}\right) . \tag{7}$$

Az O jelölésen belüli összegre úgy adunk korlátot, hogy bizonyos tagokat kiemelünk, illetve egyszerűsítünk, így végül egy növekvő mértani sorozathoz jutunk.

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{\log_b n - 1} a^j \left(\frac{n}{b^j}\right)^{\log_b a - \varepsilon} &= n^{\log_b a - \varepsilon} \sum_{j=0}^{\log_b n - 1} \left(\frac{ab^{\varepsilon}}{b^{\log_b a}}\right)^j \\
&= n^{\log_b a - \varepsilon} \sum_{j=0}^{\log_b n - 1} (b^{\varepsilon})^j \\
&= n^{\log_b a - \varepsilon} \left(\frac{b^{\varepsilon \log_b n} - 1}{b^{\varepsilon} - 1}\right) \\
&= n^{\log_b a - \varepsilon} \left(\frac{n^{\varepsilon} - 1}{b^{\varepsilon} - 1}\right) .
\end{aligned}$$

Mivel b és ε állandók, ezért az utóbbi kifejezés egyszerűsíthető úgy, hogy $n^{\log_b a - \varepsilon} O(n^{\varepsilon}) = O(n^{\log_b a})$. Ezt a (7) összefüggésbe helyettesítve kapjuk, hogy

$$g(n) = O(n^{\log_b a}) ,$$

és ezzel az 1. esetet bebizonyítottuk. A 2. esetben a $f(n) = \Theta(n^{\log_b a})$ feltétel mellett azt kapjuk, hogy $f(n/b^j) = \Theta((n/b^j)^{\log_b a})$. A (6) egyenlőségbe helyettesítve arra jutunk, hogy

$$g(n) = \Theta\left(\sum_{j=0}^{\log_b n - 1} a^j \left(\frac{n}{b^j}\right)^{\log_b a}\right) . \tag{8}$$

A Θ-n belüli összegekre az 1. esethez hasonlóan adunk korlátot, de ekkor nem kapunk mértani sort. Vegyük azonban észre, hogy minden tag ugyanaz.

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{\log_b n - 1} a^j \left(\frac{n}{b^j}\right)^{\log_b a} &= n^{\log_b a} \sum_{j=0}^{\log_b n - 1} \left(\frac{a}{b^{\log_b a}}\right)^j \\
&= n^{\log_b a} \sum_{j=0}^{\log_b n - 1} 1 \\
&= n^{\log_b a} \log_b n .
\end{aligned}$$

Ezt helyettesítve (8)-ba kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
g(n) &= \Theta(n^{\log_b a} \log_b n) \\
&= \Theta(n^{\log_b a} \lg n) ,
\end{aligned}$$

és ezzel a 2. esetet is bebizonyítottuk.

A 3. esetet is hasonlóan bizonyítjuk. Mivel $f(n)$ előfordul $g(n)$ definíciójában és $g(n)$ minden tagja nemnegatív, arra jutunk, hogy $g(n) = \Omega(f(n))$ b minden egész kitevős hatványára. Feltételezésünk szerint $af(n/b) \le cf(n)$ v.m. $c < 1$-re minden $n \ge b$ esetén, tehát $f(n/b) \le (c/a)f(n)$. j-szer ismételve kapjuk, hogy $f(n/b^j) \le (c/a)^j f(n)$, vagy ami ezzel ekvivalens, $a^j f(n/b^j) \le$

$c^j f(n)$. Ezt behelyettesítve és egyszerűsítve most egy csökkenő mértani sort kapunk, mivel c konstans.

$$\begin{aligned} g(n) &= \sum_{j=0}^{\log_b n-1} a^j f(n/b^j) \\ &\leq \sum_{j=0}^{\log_b n-1} c^j f(n) \\ &\leq f(n) \sum_{j=0}^{\infty} c^j \\ &= f(n) \left(\frac{1}{1-c} \right) \\ &= O(f(n)) \end{aligned}$$

Tehát $g(n) = \Theta(f(n))$ b minden egész kitevős hatványaira. Ezzel a 3. esetet is beláttuk. ■

Mostmár bebizonyíthatjuk a mester tételt arra az esetre, amikor n egész kitevős hatványa b-nek.

18.4. lemma. *Legyenek $a \geq 1$ és $b > 1$ konstansok, $f(n)$ pedig legyen b egész kitevős hatványain értelmezett nemnegatív függvény. A $T(n)$ függvényt definiáljuk b egész kitevős hatványaira a következő rekurzív képlettel:*

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(1) & \text{ha } n = 1\,, \\ aT(n/b) + f(n) & \text{ha } n = b^i\,, \end{cases}$$

ahol i pozitív egész. Ekkor $T(n)$-re b egész kitevői esetén a következő aszimptotikus korlátok adhatók.

1. *Ha $f(n) = O(n^{\log_b a - \varepsilon})$ valamely $\varepsilon > 0$ konstansra, akkor $T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$.*
2. *Ha $f(n) = \Theta(n^{\log_b a})$, akkor $T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \lg n)$.*
3. *Ha $f(n) = \Omega(n^{\log_b a + \varepsilon})$ valamely $\varepsilon > 0$ konstansra és $af(n/b) \leq cf(n)$ valamely $c < 1$ konstanra és elég nagy n-re, akkor $T(n) = \Theta(f(n))$.*

Bizonyítás. A bizonyításhoz a (18.3) lemma korlátait használjuk. Az 1. esetben

$$\begin{aligned} T(n) &= \Theta(n^{\log_b a}) + O(n^{\log_b a}) \\ &= \Theta(n^{\log_b a})\,, \end{aligned}$$

a 2. esetben

$$\begin{aligned} T(n) &= \Theta(n^{\log_b a}) + \Theta(n^{\log_b a} \lg n) \\ &= \Theta(n^{\log_b a} \lg n)\,, \end{aligned}$$

és a 3. esetben

$$\begin{aligned} T(n) &= \Theta(n^{\log_b a}) + \Theta(f(n)) \\ &= \Theta(f(n))\,, \end{aligned}$$

mivel $f(n) = \Omega(n^{\log_b a + \varepsilon})$. ■

18.6. Alsó és felső egészrészek

A mester tétel bizonyításának teljessé tételéhez elemzésünket ki kell terjeszteni azokra az esetekre is, amikor a mester egyenletben alsó és felső egészrészek is szerepelnek, azért, hogy a rekurzív egyenletet minden egész számra definiáljuk, ne csak b egész kitevőire. Egyeszerűen adhatunk alsó korlát a

$$T(n) = aT(\lceil n/b \rceil) + f(n) \tag{9}$$

egyenletre, és felső korlátot a

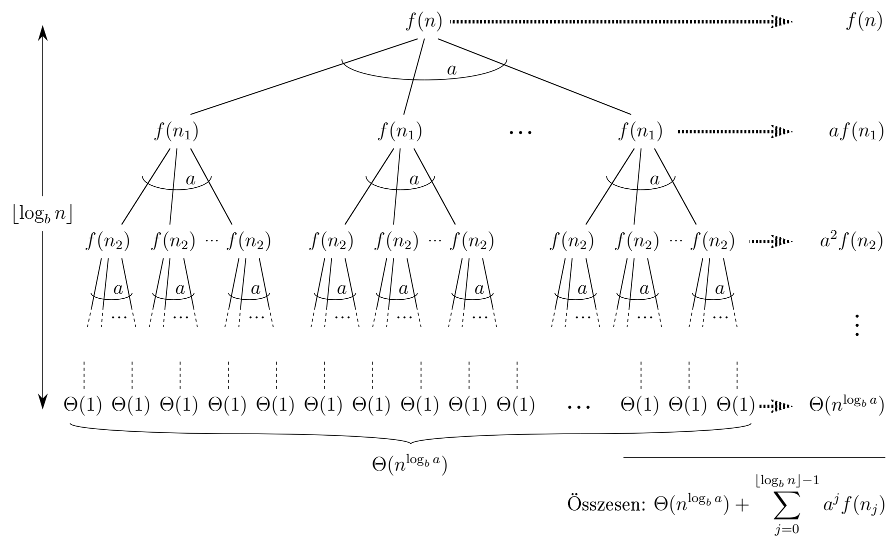
$$T(n) = aT(\lfloor n/b \rfloor) + f(n) \tag{10}$$

egyenletre, mivel az 1. esetben a $\lceil n/b \rceil \geq n/b$ egyenlőtlenséget, a 2. esetben pedig a $\lfloor n/b \rfloor \leq n/b$ egyenlőtlenséget használhatjuk ki. A két eset hasonlóan bizonyítható, ezért csak az utóbbit fogjuk megmutatni.

Módosítsuk a korábbi rekurziós fát úgy, hogy az argumentumok felső egészrészei szerepeljenek benne. Ahogy lefelé haladunk a rekurziós fában, a következő sorozat szerinti argumentumokra történik hívás.

$$
\begin{aligned}
n &, \\
\lceil n/b \rceil &, \\
\lceil \lceil n/b \rceil /b \rceil &, \\
\lceil \lceil \lceil n/b \rceil /b \rceil /b \rceil &, \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

1



4. ábra. Módosított rekurziós fa a mester tétel bizonyításához.

Jelölje n_j a sorozat j-edik elemét, ahol

$$n_j = \begin{cases} n & \text{ha } j = 0 \,, \\ \lceil n_{j-1}/b \rceil & \text{ha } j > 0 \,. \end{cases} \tag{11}$$

Először határozzuk meg azt a k mélységet, amelyre már n_k konstans. A $\lceil x \rceil \le x+1$ egyenlőtlenséget fehasználva azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} n_0 &\le n \,, \\ n_1 &\le \frac{n}{b} + 1 \,, \\ n_2 &\le \frac{n}{b^2} + \frac{1}{b} + 1 \,, \\ n_3 &\le \frac{n}{b^3} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{b} + 1 \,, \\ &\vdots \end{aligned}$$

Általánosan,

$$\begin{aligned} n_j &\le \frac{n}{b^j} + \sum_{i=0}^{j-1} \frac{1}{b^i} \\ &< \frac{n}{b^j} + \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{b^i} \\ &= \frac{n}{b^j} + \frac{b}{b-1} \,. \end{aligned}$$

és így $j = \lfloor \log_b n \rfloor$ esetén

$$\begin{aligned} n_{\lfloor \log_b n \rfloor} &< \frac{n}{b^{\lfloor \log_b n \rfloor}} + \frac{b}{b-1} \\ &\le \frac{n}{b^{\log_b n - 1}} + \frac{b}{b-1} \\ &= \frac{n}{n/b} + \frac{b}{b-1} \\ &= b + \frac{b}{b-1} \\ &= O(1) \,, \end{aligned}$$

tehát a $\lfloor \log_b n \rfloor$ mélységben a részproblémák mérete konstans.

Az ábra alapján azt kapjuk, hogy

$$T(n) = \Theta(n^{\log_b a}) + \sum_{j=0}^{\lfloor \log_b n \rfloor - 1} a^j f(n_j) \,, \tag{12}$$

ami nagyon hasonló a mester egyenlethez, kivéve, hogy n tetszőleges egész és nem csak b egész kitevős hatványa.

Most már kiszámíthatjuk az összeket, ami

$$g(n) = \sum_{j=0}^{\lfloor \log_b n \rfloor - 1} a^j f(n_j) \tag{13}$$

A 3. esettel kezdve, legyen $af(\lceil n/b \rceil) \le cf(n)$ ha $n > b + b/(b-1)$, ahol $c < 1$ konstans, tehát $a^j f(n_j) \le c^j f(n)$. Így a (13) egyenletben lévő összeg ugyanúgy számítható ki, mint a 18.3. lemmában. A 2. esetben $f(n) = \Theta(n^{\log_b a})$ teljesül. Ha meg tudjuk mutatni, hogy $f(n_j) = O(n^{\log_b a}/a^j) = O((n/b^j)^{\log_b a})$, akkor a 18.3 lemma 2. esetre vonatkozó bizonyítása alkalmazható. Vegyük észre, hogy $j \le \lfloor \log_b n \rfloor$ miatt $b^j/n \le 1$. Az $f(n) = O(n^{\log_b a})$ korlát maga után vonja olyan $c > 0$ konstans létezését, hogy elég nagy n_j-re

$$\begin{aligned}
f(n_j) &\leq c\left(\frac{n}{b^j}+\frac{b}{b-1}\right)^{\log_b a} \\
&= c\left(\frac{n}{b^j}\left(1+\frac{b^j}{n}\cdot\frac{b}{b-1}\right)\right)^{\log_b a} \\
&= c\left(\frac{n^{\log_b a}}{a^j}\right)\left(1+\left(\frac{b^j}{n}\cdot\frac{b}{b-1}\right)\right)^{\log_b a} \\
&\leq c\left(\frac{n^{\log_b a}}{a^j}\right)\left(1+\frac{b}{b-1}\right)^{\log_b a} \\
&= O\left(\frac{n^{\log_b a}}{a^j}\right),
\end{aligned}$$

mivel $c(1+b/(b-1))^{\log_b a}$ konstans. Ezzel a 2. esetet bebizonyítottuk. Az 1. eset bizonyítása ezzel szinte azonos. A bizonyítás kulcsa az, hogy egy bonyolultabb számítást igénylő, de a 2. eset megfelelő bizonyításához hasonló módon igazoljuk a $f(n_j) = O(n^{\log_b a-\varepsilon})$ korlátot.

Ezzel a mester tételben szereplő felső korlátokat minden egész n-re igazoltuk. Az alsó korlátok hasonlóan bizonyíthatók.