3. fejezet

Totális Unimoduláris Mátrixok (TUM)

3.1. Definíciók

Egy $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ négyzetes mátrix determinánsa: $\det(\mathbf{A})$ – a mátrix elemeiből számolható. Geometriailag ez az n-dimenziós paralelepipedon előjeles térfogata. Az előjel pozitív vagy negatív aszerint, hogy a lineáris transzformáció megőrzi vagy megfordítja egy valós vektortér irányát. $\det(\mathbf{A}) = 0$ akkor és csak akkor, ha $\mathbf{A}^{-1}$ nem létezik.

4. Definíció (Unimoduláris mátrix)**.** *Egy* $\mathbf{A}$ *négyzetes mátrix* unimoduláris*, ha* $\det(\mathbf{A}) = \pm 1$.

5. Definíció (Teljesen unimoduláris mátrix)**.** *Egy* $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ *mátrix* teljesen unimoduláris*, ha minden négyzetes, nem-szinguláris részmátrixa unimoduláris. Másképp megfogalmazva:* $\mathbf{A}$ *minden négyzetes* $\mathbf{M}$ *részmátrixának a determinánsa* $\det(\mathbf{M}) \in \{-1, 0, 1\}$.

3.2. TUM tulajdonságok

Bizonyítás nélkül két fontos tulajdonság: ha $\mathbf{M}$ totálisan unimoduláris, akkor

- minden eleme $-1, 0$ vagy 1,
- továbbá $-\mathbf{M}$ és $\mathbf{M}^{\mathsf{T}}$ is teljesen unimoduláris

5. Tétel. *Ha* $\mathbf{M}$ *egy teljesen unimoduláris mátrix, akkor* $\begin{bmatrix}\mathbf{M} & \mathbf{I}\end{bmatrix}$ *is teljesen unimoduláris.*

Bizonyítás. Legyen $\mathbf{e}_i = (0, \dots, 1, 0, \dots, 0)^{\mathsf{T}}$. Megmutatjuk, hogy $[\mathbf{M}\ \mathbf{e}_i]$ teljesen unimoduláris[1].

Vegyük $\mathbf{M}$ egy $k \times k$ méretű $\mathbf{U}$ részmátrixát. A lehetséges esetek:

[1] Ez tehát így nem a tétel teljes bizonyítása, de jó úton van afelé

1. Ha az utolsó oszlop és az i-edik sor benne van, akkor $\det(\mathbf{U}) = \pm 1 \cdot \det(\hat{\mathbf{M}})$, ahol $\hat{\mathbf{M}}$ az $\mathbf{M}$ részmátrixa (ami unimoduláris, tehát $\det(\hat{\mathbf{M}}) \in \{-1, 1\}$).

2. Ha nincs benne az i-edik sor (tehát az utolsó oszlop csupa nulla), akkor $\det(\mathbf{U}) = 0$.

3. Ha nem választottuk ki az utolsó oszlopot, akkor minden oszlopunk $\mathbf{M}$-ből való, ami teljesen unimoduláris, tehát a részmátrix unimoduláris.

□

3.3. LP egészértékű megoldása

6. Tétel. *Legyen* $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ *($m < n$) egy teljes sorrangú és teljesen unimoduláris mátrix,* $\mathbf{b} \in \mathbb{Z}^m$ *és* $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$*. Ekkor vegyük a következő LP feladatot:*

$$\begin{aligned} \min \quad & \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \textit{feltéve, hogy} \quad & \mathbf{M}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq 0 \end{aligned}$$

Ennek a feladatnak létezik egész $\mathbf{x}^* \in \mathbb{Z}^n$ *megoldása. Ezt az egész megoldást tetszőleges (nem-egész) LP megoldóval megkaphatjuk, hiszen a felírt modellben nem kötöttük ki, hogy a változók egészértékűek. Egy LP feladat megoldása ráadásul sokkal gyorsabb, mint egy ILP-é.*

Bizonyítás. Egy LP optimális megoldása egy lehetséges bázismegoldás (ami egy extrém pontja a $\mathcal{P} = \{\mathbf{M}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq 0\}$ poliédernek). Megmutatjuk, hogy ezek az extrém pontok egész számok.

Egy $\mathbf{x}$ akkor lesz lehetséges bázismegoldás, ha

1. $\mathbf{M}\mathbf{x} = \mathbf{b}$, $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$, azaz $\mathbf{x}$ lehetséges megoldás,

2. $\mathbf{x}$-nek legfeljebb m nemzérus eleme van.
   Jelöljük ezek indexeit a $B(\mathbf{x}) \subset \{1, \ldots, n\}$-nel.

3. $\mathbf{M}$ egy $\mathbf{A}$ részmátrixa (amit a $B(\mathbf{x})$ jelöl ki) nem-szinguláris, azaz $\det(\mathbf{A}) \neq 0$. Ebben az esetben az $\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{b}$ lineáris egyenletrendszer megoldható, ahol $\hat{\mathbf{x}}$ az $\mathbf{x}$ részvektora, amit szintén a $B(\mathbf{x})$ jelöl ki.

A 3. tulajdonságra használhatjuk a Cramer-szabályt:

$$\hat{\mathbf{x}}_i = \frac{\det(\mathbf{A}_i)}{\det(\mathbf{A})},$$

ahol $\mathbf{A}_i$-t úgy kapjuk, hogy $\mathbf{A}$ i-edik oszlopát kicseréljük $\mathbf{b}$-re.

Tudjuk, hogy $\mathbf{b}$ egész számok vektora és azt, hogy $\det(\mathbf{A}) = \pm 1$, mivel $\mathbf{A}$ nem-szinguláris és részmátrixa $\mathbf{M}$-nek (ami totálisan unimoduláris). Következésképpen $\det(\mathbf{A}_i)$-nek is egésznek kell lennie.

Emiatt $\hat{\mathbf{x}}_i$ is egész, tehát $\mathbf{x}^*$ is az. □

3.4. Gráfok és TUM-ok

Legyen $G = (V, E)$ egy *irányított* gráf, $\mathbf{B} \in \{-1, 0, 1\}^{|V| \times |E|}$ pedig G incidencia mátrixa:

$$b_{ij} = \begin{cases} -1 & \text{ha az } i \text{ csúcs a } j \text{ él végén van,} \\ 1 & \text{ha az } i \text{ csúcs a } j \text{ él elején van,} \\ 0 & \text{különben.} \end{cases} \tag{3.1}$$

7. Tétel. *A* $\mathbf{B}$ *mátrix teljesen unimoduláris.*

Bizonyítás. Indukcióval bizonyítjuk.

Tegyük fel, hogy az állítás igaz $\mathbf{B}$ minden $(k-1) \times (k-1)$ méretű részmátrixára. Vegyük egy $\mathbf{U}$ részmátrixot, ami $k \times k$ méretű. Ekkor három lehetőség van:

1. $\mathbf{U}$-nak van teljesen nullákból álló oszlopa, ekkor $\det(\mathbf{U}) = 0$
2. $\mathbf{U}$-nak van olyan oszlopa, ami tartalmaz nem-nulla elemet.
   Ekkor $\det(\mathbf{U}) = \pm 1 \cdot \det(\mathbf{U}^*)$, ahol $\mathbf{U}^*$ egy $(k-1) \times (k-1)$ méretű részmátrixa $\mathbf{U}$-nak (ami TU, tehát $\det(\mathbf{U}^*) \in \{-1, 0, 1\}$).
3. $\mathbf{U}$ minden oszlopa tartalmaz két nem-zérus elemet.
   Egy oszlopban az egyik elem $+1$, a másik -1. Mivel minden oszlop összege 0, ezért a mátrix sorai lineárisan függőek, így $\det(\mathbf{U}) = 0$.

Mindhárom esetben azt kaptuk, hogy a vizsgált mátrix TUM. □

Megjegyzés. Az iménti tétel megfordítva nem igaz, tehát nem minden TUM incidencia mátrix.

8. Tétel. *Legyen G egy páros gráf és $\mathbf{B}^+$ az előjeltelen incidencia mátrixa. Ekkor $\mathbf{B}^+$ teljesen unimoduláris.*

Bizonyítás. $\mathbf{B}^+$ minden oszlopa pontosan két nemzéró elemet tartalmaz, egy 1-est valamely $v \in V_1$-re és egy másik 1-est valamely $w \in V_2$-re. Így az előzőeket felhasználva egyszerűen partícionáljuk a sorokat úgy, hogy $M_1 = V_1$ és $M_2 = V_2$. □

3.4.1. TUM elégséges feltételei

Legyen $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ egy mátrix úgy, hogy

1. $\forall i, j : a_{ij} \in \{-1, 0, 1\}$
2. Minden oszlopban legfeljebb két nem-nulla együttható van:
$$\sum_{i=1}^{m} |a_{ij}| \leq 2 \quad (j \in [1, n])$$
3. Az M sorhalmaz szétbontható M_1 és M_2 sorhalmazokra úgy, hogy minden j oszlop, ami tartalmaz két nem-nulla együtthatót kielégíti a
$$\sum_{i \in M_1} a_{ij} - \sum_{i \in M_2} a_{ij} = 0$$
feltételt. Ekkor $\mathbf{A}$ teljesen unimoduláris.

3.5. TUM példák

3.5.1. Legrövidebb út

Vegyük az s-ből t-be legrövidebb út problémát egy G gráfban. A döntési változó:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{ha az } (i,j) \text{ él része a legrövidebb útnak} \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

Az ebből felírt LP-modell:

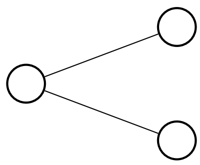
$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{(i,j) \in E} x_{i,j} \\ \text{feltéve, hogy} \quad & (\mathbf{Bx})_i = \begin{cases} -1 & \text{ha } i = s \\ 1 & \text{ha } i = t \\ 0 & \text{különben} \end{cases} \end{aligned}$$

ahol tehát $\mathbf{B}$ mátrix a G gráf incidencia mátrixa.

Ugyanez más jelölésben:

$$\begin{aligned} \min \quad & \mathbf{1}^T \mathbf{x} \\ \text{feltéve, hogy} \quad & \mathbf{Bx} = (-1, 0, \ldots, 0, 1)^T \\ & \mathbf{x} \geq 0 \end{aligned}$$

Nem kell kikötnünk, hogy $x_{i,j} \in \{0, 1\}$, mivel ez automatikusan teljesül.



3.1. ábra. Ebben a példában a $\mathbf{B}^+\mathbf{x} \leq \mathbf{1}$ feltétel miatt csak az egyik élt választhatjuk be.

3.5.2. Maximális elemszámú párosítás páros gráfokban

Legyen a döntési változó

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{ha az } (i,j) \text{ él része a párosításnak} \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

Ebből az LP-modell

$$\begin{aligned} \max \quad & \mathbf{1}^T\mathbf{x} \\ \text{feltéve, hogy} \quad & \mathbf{B}^+\mathbf{x} \leq \mathbf{1} \end{aligned}$$

Mivel $\mathbf{B}^+$ teljesen unimoduláris, ezért elég hozzáadni az $\mathbf{x} \geq 0$ feltételt, hogy az $x_{ij} \in \{0,1\}$ automatikusan teljesüljön.

A $\mathbf{B}^+\mathbf{x} \leq \mathbf{1}$ jelentése, hogy amennyiben a gráfunkban van a 3.1. ábrán látható részgráf, akkor a két él közül vagy az egyiket vagy a másikat vagy egyiket sem választjuk ki (de a kettőt egyszerre semmiképpen).

3.5.3. Minimális s-t vágás

Egy súlyozott, irányított G gráfot tekintünk, ahol legyen c_{ij} az élek súlya. Van 2 kijelölt csúcsunk: s és t. Köztük keressük a minimális vágást.

Döntési változók:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{ha az } i \text{ csúcsot visszaadjuk,} \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

továbbá

$$w_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{ha az } (i,j) \text{ élet vágjuk,} \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

Példa....

Vegyük észre, hogy az (i,j) élet akkor és csak akkor vágjuk, ha i az s csúcs oldalán van, j pedig a t csúcs oldalán. Azaz

$$x_i = 1 \text{ és } x_j = 0 \Leftrightarrow w_{ij} = 1.$$

Ennek megfelelő korlátozó feltétel:

$$x_i - x_j \leq w_{ij}$$

Az LP modellünk:

$$\begin{aligned} \min \quad & \mathbf{c}^{\mathsf{T}}\mathbf{w} \\ \text{feltéve, hogy} \quad & [\mathbf{B} \quad -\mathbf{I}]\,[\mathbf{x} \;\; \mathbf{w}]^{\mathsf{T}} \leq \mathbf{0} \\ & \mathbf{0} \leq \mathbf{w} \\ & \mathbf{0} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{1} \end{aligned}$$

Itt is automatikusan kapjuk, hogy $\mathbf{x}$ és $\mathbf{w}$ bináris értékeket vesznek föl az optimumban.