9. fejezet

Dantzig-Wolfe dekompozíció

9.1. LP megfogalmazása

A következő, szokásos LP feladatból indulunk ki:

$$\begin{array}{rll} \min & \mathbf{c}^T\mathbf{x} & \\ \textit{feltéve} & \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} & (1) \\ & \mathbf{x} \in P, & (2) \end{array}$$

ahol P egy politóp[1]. Itt kétféle feltétel szerepel tehát: az (1) nehéz (bonyolult) feltételek, míg a (2) egy könnyű (egyszerű) feltételhalmaz. A célunk, hogy úgy írjuk át a problémát, hogy csak egyszerű feltételek szerepeljenek benne.

A Benders dekompozícióhoz hasonlóan itt is kettévesszük a problémát:

$$\begin{array}{rl} \min & \mathbf{c}_1^T\mathbf{x}_1 + \mathbf{c}_2^T\mathbf{x}_2 \\ \textit{feltéve} & \mathbf{A}_1\mathbf{x}_1 + \mathbf{A}_2\mathbf{x}_2 = \mathbf{b} \end{array}$$

ahol a feltételsort bonyolító (*complicating* vagy *coupling*) feltételeknek hívjuk. A probléma szétbontása előtt nézzük meg a következő tételt.

[1] Ez a sokszög általánosítása: a kétdimenziós sokszög egy 2-politóp, a poliéder egy 3-politóp.

9.2. Minkowski reprezentációs tétele

9. Tétel (Minkowski reprezentációs tétele)**.** *Minden P poliédert fel lehet írni a következő formában:*

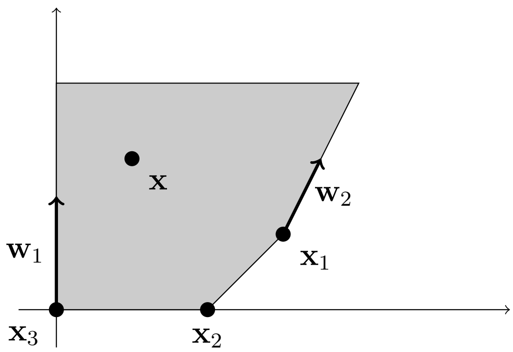
$$P = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{x} = \sum_{j \in J} \lambda^j \mathbf{x}^j + \sum_{r \in R} \mu^r \mathbf{w}^r \right\}$$
$$\sum_{j \in J} \lambda^j = 1$$
$$\lambda \in \mathbb{R}_+^{|J|}$$
$$\mu \in \mathbb{R}_+^{|R|}$$

ahol $\{\mathbf{x}^j, j \in J\}$ *a* P *extrém* pontjai*, míg* $\{\mathbf{w}^r, r \in R\}$ *a* P *extrém* sugarai.

2. Megjegyzés. *Az extremális sugarakra a gyakorlatban nagyon ritkán van szükség, gyakran feltételezhetjük, hogy egyszerűen használhatjuk csak az extremális pontokat. Egy egyszerű felírásban elhagyhatjuk a sugarakat.*

A 9.1. ábrán látható egy P poliéder reprezentációja. Az $\mathbf{x}$ belső pontot előállíthatjuk a megadott extremális pontok és sugarak segítségével:

$$\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}_2 + (1 - \lambda)\mathbf{x}_3 + \mu \mathbf{w}_2, 0 \leq \lambda \leq 1, \mu \geq 0$$



9.1. ábra. Példa egy P poliéder Minkowski reprezentációjára.

A reprezentációs tételt felhasználva írjuk fel a következőképpen a feladatot:

$$\begin{aligned} \min \quad & \mathbf{c}_1^T \mathbf{x}_1 + \mathbf{c}_2^T \mathbf{x}_2 \\ \text{feltéve, hogy} \quad & \mathbf{A}_1 \mathbf{x}_1 + \mathbf{A}_2 \mathbf{x}_2 = \mathbf{b} \\ & \mathbf{B}_1 \mathbf{x}_1 = \mathbf{d}_1 \\ & \mathbf{B}_2 \mathbf{x}_2 = \mathbf{d}_2, \end{aligned}$$

ahol az utolsó két feltétel valójában azt fejezi ki, hogy $\mathbf{x} \in P$. Az $\mathbf{x}_1$ változó – kihasználva a Minkowski tételt – átírható a következő alakba:

$$\sum_{j \in J_1} \lambda_1^j \mathbf{x}_1^j + \sum_{r \in R_1} \mu_1^r \mathbf{w}_1^r, \qquad \lambda_1^j \geq 0, \quad \mu_1^r \geq 0, \quad \sum_{j \in J_1} \lambda_1^j = 1.$$

Ugyanez megtehető a másik változóval is. **Fontos**, hogy itt az $\mathbf{x}_1^j$ már egy extremális pontot jelöl. Ez kihasználva kapjuk a következő, átfogalmazott problémát (amit teljes *mester problémának* hívunk):

$$\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{j\in J_1} \left(\mathbf{c}^T\mathbf{x}_1^j\right)\lambda_1^j + \sum_{r\in R_1} \left(\mathbf{c}^T\mathbf{w}_1^r\right)\mu_1^r + \sum_{j\in J_2} \left(\mathbf{c}^T\mathbf{x}_2^j\right)\lambda_2^j + \sum_{r\in R_2} \left(\mathbf{c}^T\mathbf{w}_2^r\right)\mu_2^r \\
\textit{feltéve} \quad & \sum_{j\in J_1} \left(\mathbf{A}_1\mathbf{x}_1^j\right)\lambda_1^j + \sum_{r\in R_1} \left(\mathbf{A}_1\mathbf{w}_1^r\right)\mu_1^r + \sum_{j\in J_2} \left(\mathbf{A}_2\mathbf{x}_2^j\right)\lambda_2^j + \sum_{r\in R_2} \left(\mathbf{A}_2\mathbf{w}_2^r\right)\mu_2^r = \mathbf{b} \\
& \sum_{j\in J} \lambda_i^j = 1 \quad (i=1,2) \\
& \lambda_i^j \geq 0 \quad (i=1,2)\ (j\in J) \\
& \mu_i^j \geq 0 \quad (i=1,2)\ (j\in J)
\end{aligned} \tag{9.1}$$

Amit tudunk erről a problémáról:

- ez a probléma ekvivalens az eredetivel,
- a döntési változók innentől a súlyai az extremális pontoknak (λ_1^j, λ_2^j) és az extremális sugaraknak (μ_1^r, μ_2^r),
- a döntési változók száma *hatalmas* lehet (de a későbbiekben ezek nagy részét figyelmen kívül fogjuk hagyni),
- a feltételek száma kevesebb (megszabadultunk a $\mathbf{B}_1\mathbf{x}_1 = \mathbf{d}_1$ és $\mathbf{B}_2\mathbf{x}_2 = \mathbf{d}_2$-től – ezek ráadásul egyenlőségi feltételek, amik nagyon sokat szigorítanak a keresési téren!),

9.3. Optimalitás ellenőrzése

Ha adott egy $\mathbf{B}$ bázisunk ($\mathbf{B}$ az $\mathbf{A}$ azon sorait tartalmazza, amik benne vannak a bázisban), ellenőrizni kell, hogy az optimális-e. Itt két feltételnek kell teljesülnie:

(a) $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \geq 0$

(b) $\mathbf{c}_B^T - \mathbf{y}^T\mathbf{A} \geq 0$ (ez a *csökkentett költség*)[2], ahol $\mathbf{c}_B$ a bázisváltozók együtthatóinak vektora

A csökkentett költséget (*reduced cost*) ki kell számolnunk az új változóinkra (λ_i^j és μ_i^r).
A csökkentett költség a λ_1^j változóra:

$$\mathbf{c}_1^T\mathbf{x}_1^j - \begin{bmatrix}\mathbf{y}^T & t_1 & t_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{A}_1\mathbf{x}_1^j \\ 1 \\ 0\end{bmatrix} = \left(\mathbf{c}_1^T - \mathbf{y}^T\mathbf{A}_1\right)\mathbf{x}_1^j - t_1 \tag{9.2}$$

[2] Az eredeti diasor a duális változót π-vel jelöli, ebben a jegyzetben $\mathbf{y}$-t használunk

A csökkentett költség a μ_1^r változóra:

$$\mathbf{c}_1^T \mathbf{w}_1^r - \begin{bmatrix}\mathbf{y}^T & t_1 & t_2\end{bmatrix} \begin{bmatrix}\mathbf{A}_1 \mathbf{x}_1^j \\ 1 \\ 0\end{bmatrix} = \left(\mathbf{c}_1^T - \mathbf{y}^T \mathbf{A}_1\right) \mathbf{x}_1^j \tag{9.3}$$

Teljesen hasonlóan mehet a λ_2^j és μ_2^r változókra is.

Ahelyett, hogy ezt minden változóra (amiből rengeteg van) meghatároznánk, megoldhatjuk a következő feladatokat (ezek lesznek az *alproblémák*):

$$\begin{aligned} z_1 &= \min \left(\mathbf{c}_1^T - \mathbf{y}^T \mathbf{A}_1\right) \mathbf{x}_1 \\ \text{feltéve, hogy} \quad \mathbf{B}_1 \mathbf{x}_1 &= \mathbf{d}_1 \\ \mathbf{x}_1 &\geq 0 \end{aligned} \tag{9.4}$$

valamint

$$\begin{aligned} z_2 &= \min \left(\mathbf{c}_2^T - \mathbf{y}^T \mathbf{A}_2\right) \mathbf{x}_2 \\ \text{feltéve, hogy} \quad \mathbf{B}_2 \mathbf{x}_2 &= \mathbf{d}_2 \\ \mathbf{x}_2 &\geq 0 \end{aligned} \tag{9.5}$$

Az optimális költségnek három esete van (a (9.4) alproblémában, de ugyanez igaz a (9.5) alproblémára is):

(1) $-\infty$
Ekkor a szimplex kimenete egy extremális sugár $\mathbf{w}_1^r$, amire $\left(\mathbf{c}_1^T - \mathbf{y}^T \mathbf{A}_1\right) \mathbf{w}_1^r < 0$
Következtetés: a μ_1^r csökkentett költsége negatív
Cselekvés: adjuk hozzá μ_1^r-t a mester problémához a következő oszloppal:

$$\begin{bmatrix}\mathbf{A}_1 \mathbf{w}_1^r \\ 0 \\ 0\end{bmatrix}$$

(2) Véges, de kevesebb, mint t_1
Ekkor a szimplex kimenete egy extremális pont $\mathbf{x}_1^j$, amire $\left(\mathbf{c}_1^T - \mathbf{y}^T \mathbf{A}_1\right) \mathbf{x}_1^j < t_1$
Következtetés: a λ_1^j csökkentett költsége negatív
Cselekvés: adjuk hozzá λ_1^j-t a mester problémához a következő oszloppal:

$$\begin{bmatrix}\mathbf{A}_1 \mathbf{x}_1^j \\ 1 \\ 0\end{bmatrix}$$

(3) Az optimális költség véges, de nem kevesebb, mint t_1
Következtetés: $\left(\mathbf{c}_1^T - \mathbf{y}^T \mathbf{A}_1\right) \mathbf{x}_1^j > t_1$ minden $\mathbf{x}_1^j$ extremális pontra *és* $\left(\mathbf{c}_1^T - \mathbf{y}^T \mathbf{A}_1\right) \mathbf{w}_1^r >$ > 0 minden extremális sugárra
Cselekvés: megállunk, a bázismegoldás optimális

Az első két esetben, ha a csökkentett költség negatív, az azt jelenti, hogy ha ezeket a nembázis változókat bevesszük a bázisba, azzal javíthatjuk a megoldás értékét. De így, hogy iteratívan adjuk hozzá az oszlopokat (változókat) a feladathoz, csak azokat a változókat vesszük hozzá, amik ténylegesen segítenek a megoldás javításában.

A harmadik esetben azt kapjuk, hogy nincs olyan változó, ami nincs a problémában, de javítaná a megoldást.

Csökkentett mesterprobléma (reduced master problem)

A teljes mesterprobléma megoldása helyett használhatunk egy csökkentett változóhalmazt is: $\tilde{J}_i \subset J_i$, $\tilde{R}_j \subset R_j$. Különben rengeteg oszlopunk (változónk) lenne, amik nagy része haszontalan lenne és csak egy kis része ténylegesen haszonos.

9.4. A Dantzig-Wolfe algoritmus

A következőt csináljuk:

1. Vegyünk egy kezdeti lehetséges megoldást és oldjuk meg a csökkentett (korlátozott) mesterproblémát. Itt kapunk majd $\mathbf{y}$, t_1 és t_2 értékeket
2. Oldjuk meg a két részproblémát. Ha $\left(\mathbf{c}_1^T - \mathbf{y}^T\mathbf{A}_1\right)\mathbf{x}_1 \geq t_1$ és $\left(\mathbf{c}_2^T - \mathbf{y}^T\mathbf{A}_2\right)\mathbf{x}_2 \geq t_2$, akkor megállunk az optimális megoldással:
$$x_1 = \sum_{j\in\tilde{J}_1} \lambda_1^j \mathbf{x}_1^j + \sum_{r\in\tilde{R}_1} \mu_1^r \mathbf{w}_1^r$$
$$x_2 = \sum_{j\in\tilde{J}_2} \lambda_2^j \mathbf{x}_2^j + \sum_{r\in\tilde{R}_2} \mu_2^r \mathbf{w}_2^r$$
3. Ha az i-edik részprobléma nem korlátos, vegyük fel μ_i^r-t a mesterproblémába
4. Ha az i-edik részprobléma korlátos, de csökkentett költsége kevesebb, mint t_i, akkor vegyük fel λ_i^j-t a mesterproblémába
5. Generáljunk egy oszlopot a belépő változóhoz, oldjuk meg a mesterproblémát és újra kapunk $\mathbf{y}$, t_1 és t_2 értékeket. Ugorjunk a 2. lépésre.

9.5. Példa

Oldjuk meg az alábbi feladatot a Dantzig-Wolfe algoritmussal:

$$\begin{aligned} \min 4x_1 - x_2 - 6x_3 \\ \text{feltéve, hogy } 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 17 \\ 1 \leq x_1 \leq 2 \\ 1 \leq x_2 \leq 2 \\ 1 \leq x_3 \leq 2. \end{aligned} \tag{9.6}$$

Osszuk szét a korlátozó feltételeket: Legyen $P = \{x \in \mathbb{R}^3 | 1 \leq x_i \leq 2\}$ reprezentálva az x_j extrém pontjai szerint.

Komplikált feltételek: $Ax = b$, $A = [3 \ \ 2 \ \ 4], b = 17$.

Kezdés: Induljunk az $\mathbf{x}^1 = (2, 2, 2)$ és $x_2 = (1, 1, 2)$ extremális pontokból, valamint a csökkentett mester probléma bázisváltozói legyenek $\lambda 1, \lambda 2 Basismatrix : ""32+22+4231+21+ + 421813B == 1111 Restrictedmaster : min 22\lambda 117\lambda 2 s.t. 18\lambda 1 + 13\lambda 2 = 17, ()\lambda 1 + \lambda 2 = = 1, (t)\lambda 1, \lambda 2 \geq 0 Optimalsolution \lambda 1 = 0.8, \lambda 2 = 0.2, optimalmultipliers := 1, t = 4$

hObjective function i coefficients: h i 4 1 6 (1) 3 2 4 = 1 1 2 Subproblem: min x1 + x2 2x3 s.t. 1 $\leq x1 \leq 2, 1 \leq x2 \leq 2, 1 \leq x3 \leq 2 Optimalsolution : x3 = (2, 1, 2), objectivefunctionvalue- - 5islessthant = 4 Introductionof \lambda 3 tomasterwithcoefficients"" 32 + 21 + 4216 = 11$

Restricted master problem: min $22\lambda 117\lambda 221\lambda 3 s.t. 18\lambda 1 + 13\lambda 2 + 16\lambda 3 = 17, ()\lambda 1 + \lambda 2 + + \lambda 3 = 1, (t)\lambda 1, \lambda 2, \lambda 3 \geq 0 Optimalsolution \lambda 1 = 0.5, \lambda 3 = 0.5, optimalmultipliers := = 0.5, t = 13$

Subproblem: min 2.5x1 4x3 s.t. $1 \leq x1 \leq 2, 1 \leq x2 \leq 2, 1 \leq x3 \leq 2 Optimalsolution : x1 = (2, 2, 2), objectivefunctionvalue - 13 isequaltot = 13 Optimalsolutionis 211x = x1+ + x3 = 1.5222$