Optimalizálás Felsőfokon

1. előadás: ILP alapjai

2022. szeptember 14.

Jelölések

A vektorokat félkövér kisbetűvel (pl. $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \ldots$) a mátrixokat félkövér nagybetűvel (pl. $\mathbf{A}, \mathbf{C}, \ldots$) jelöljük.

1. Az egészértékű lineáris programozás (ILP) alapjai

Az anyag alapját Raphael Hauser (University of Oxford) B6.3 Integer Programming kurzushoz készült fóliái adták.

1.1. ILP definíciók

Az egészértékű lineáris programozásban a következő formájú feladatokkal foglalkozunk:

$$\begin{aligned} \max_{\mathbf{x}} \quad & \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\ \text{feltéve, hogy} \quad & \mathbf{A}\mathbf{x} \le \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \ge 0 \\ & \mathbf{x} \in \mathbb{Z}^n, \end{aligned} \tag{1}$$

ahol $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ és $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$.

Ezek egy speciális esete az, amikor az $\mathbf{x}$ elemei csak a 0 vagy 1 értéket vehetik fel. Ilyenkor a feladatot *bináris* (lineáris) egészértékű programnak hívjuk:

$$\begin{aligned} \max_{\mathbf{x}} \quad & \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\ \text{feltéve, hogy} \quad & \mathbf{A}\mathbf{x} \le \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \in \mathbb{B}^n := \{0, 1\}^n \end{aligned} \tag{2}$$

Ez úgy is értelmezhető speciális esetként, hogy az előző (általános egészértékű) problémához még egy feltételsorozatot hozzáveszünk:

$$\mathbf{x} \leq \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

Lehetnek olyan feladataink is, ahol bizonyos változók egészértékűek, míg mások valós (nem egész) értékeket is felvehetnek. Ezeket *kevert értékű* lineáris programozási feladatnak hívjuk:

$$\begin{aligned} \max \quad & \mathbf{c}^T\mathbf{x} + \mathbf{h}^T\mathbf{y} \\ \text{feltéve, hogy} \quad & \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{G}\mathbf{y} \leq \mathbf{b} \\ & \mathbf{x}, \mathbf{y} \geq 0 \\ & \mathbf{y} \in \mathbb{Z}^p \end{aligned} \tag{3}$$

1.2. Példák

1.2.1. Hozzárendelési feladat

Adott n emberünk, hogy elvégezzen n darab feladatot. Egy személy egy feladatot végez el és minden személynek minden feladatra van egy c_{ij} költsége. Keressünk egy olyan hozzárendelést, ami minimalizálja az összköltséget.

Ez alapján a döntési változó:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{ha az } i\text{-edik személy hozzá van rendelve a } j\text{-edik feladathoz} \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$$

A feltételek pedig azt fejezik ki, hogy (i) egy emberhez pontosan egy munkát rendelünk és (ii) egy munkához pontosan egy embert rendelünk:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \\ \text{feltéve, hogy} \quad & \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad i = 1, \dots, n \\ & \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad j = 1, \dots, n \\ & x_{ij} \in \mathbb{B} \quad i, j = 1, \dots, n \end{aligned}$$

1.2.2. 0-1 hátizsák

Van egy hátizsákunk b mérettel, ebbe akarunk n darab tárgyból valamennyit beletenni. Egy i tárgynak van a_i mérete (vagy súlya) és c_i értéke. Úgy pakoljuk meg a hátizsákot, hogy a benne lévő tárgyak összértéke maximális legyen.

Itt a döntési változó:

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{ha az } i\text{-edik tárgy a zsákban van} \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

A teljes modell pedig:

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \\ \text{feltéve, hogy} \quad & \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \leq b \\ & \mathbf{x} \in \mathbb{B}^n \end{aligned} \tag{4}$$

Ennek a problémának van egy egészértékű változata is, ahol egy-egy tárgyból többet is bepakolhatunk a táskába.

1.3. LP relaxáció

Ha elhagyjuk az egészértékűséget biztosító feltételt a fenti problémákból, akkor egy lineáris programozási (LP) feladathoz jutunk.

$$\begin{aligned} \text{(IP)} \quad z^* = & \max_{\mathbf{x}} \mathbf{c}^{\mathsf{T}} \mathbf{x} \\ \text{feltéve, hogy} \quad & \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}, \\ & \mathbf{x} \in \mathbb{Z}_+^n. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(LP)} \quad \bar{z} = & \max_{\mathbf{x}} \mathbf{c}^{\mathsf{T}} \mathbf{x} \\ \text{feltéve, hogy} \quad & \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}, \\ & \mathbf{x} \geq 0. \end{aligned}$$

Ennek két fő hatása van a lehetséges megoldások halmazára (jelöljük ezt most $\mathcal{F}$-fel):

1. $\mathcal{F}$ nagyobb lesz
2. $\mathcal{F}$ konvex lesz

1. Tétel. *Az (a) hatás következménye, hogy $\bar{z} \geq z^*$ (ahol $\bar{z}$ az LP feladat optimális megoldásának értéke, míg z^* az egészértékű (ILP) feladaté).*

Bizonyítás. Könnyen belátható, hogy mivel $\bar{x}$-et úgy kaptuk, hogy feltételt hagytunk el az egészértékű problémából, ezért $\mathbf{x}^*$ (az ILP optimális megoldása) a relaxált (LP) feladatban is lehetséges megoldás. Tehát

$$\bar{z} \geq \mathbf{c}^T \mathbf{x}^* = z^*$$

□

Ennek egy következménye, hogy a relaxált LP feladatot sokkal könnyebb megoldani, mint az eredeti ILP-t.

Egy első ötlet az ILP megoldás megtalálására a *kerekítés* használata lehet, ez azonban ritkán válik be:

- a kerekítés nem biztos, hogy triviális
  pl. ha egy bináris feladatban az optimális $\mathbf{x}^*$-ban sok 0.5 körüli érték van
- a kerekített megoldás messze lehet az ILP optimumától
- a kerekített megoldás lehet, hogy nem is lehetséges megoldás az ILP-ben

1.4. A szimplex algoritmus

A szimplex algoritmus LP feladatok megoldására szolgál. Ezekben a feladatokban képes optimális megoldást szolgáltatni.

1. bevezetünk *mesterséges változókat*, hogy az egyenlőtlenségi feltételeket egyenlőséggé alakítsuk
2. kifejezzük *szótár* formában a feladatot úgy, hogy kifejezzük az előbb bevezetett mesterséges változókat az egyenletekből
3. vegyünk az $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ kezdeti lehetséges megoldást a természetes (és egyúttal nem bázis) és $\mathbf{x} = \mathbf{b}$-t a mesterséges (és egyúttal bázis-) változókra
4. keressünk egy nembázis változót, amit ha növelünk, azzal növeljük (maximalizálás esetén) a célfüggvény értékét – ez lesz a belépő változó. Ehhez keressünk egy bázisban egy kilépő változót: azt, amelyiknek a feltétele a legjobban korlátoz. Hajtsuk végre a helyettesítést (ezt hívjuk *pivot* lépésnek is). Itt egyúttal ellenőrizzük azt is, hogy korlátos-e a feladat
5. ismételjük a 4. lépést addig, amíg van olyan változó, aminek a bázisba választásával növelni tudjuk a célfüggvény értékét

1.4.1. Példa

Vizsgáljuk a következő LP feladatot:

$$
\begin{aligned}
z = \max_{x} \; & 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 \\
\text{feltéve, hogy} \quad & 2x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 5 \\
& 4x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 11 \\
& 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 8 \\
& x_1, x_2, x_3 \geq 0.
\end{aligned}
$$

Előkészület I: bevezetjük az $x_4, x_5, x_6 \geq 0$ *mesterséges (slack) változókat* azért, hogy az egyenlőtlenségekből egyenleteket gyártsunk:

$$\begin{aligned} z = \max\, & 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 \\ \text{feltéve, hogy}\quad & 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 5 \\ & 4x_1 + x_2 + 2x_3 + x_5 = 11 \\ & 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_6 = 8 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0. \end{aligned}$$

Előkészület II: írjuk most fel a feladatot *szótár alakban*:

$$\max z \quad \text{ú.h.} \quad x_1, \ldots, x_6 \geq 0,$$

ahol a változókat az alábbi lineáris egyenletrendszer kapcsolja össze:

$$\begin{aligned} x_4 &= 5 - 2x_1 - 3x_2 - x_3 \\ x_5 &= 11 - 4x_1 - x_2 - 2x_3 \\ x_6 &= 8 - 3x_1 - 4x_2 - 2x_3 \\ z &= 0 + 5x_1 + 4x_2 + 3x_3. \end{aligned}$$

0. lépés: az $x_1, x_2, x_3 = 0$, $x_4 = 5$, $x_5 = 11$, $x_6 = 8$ egy kezdeti lehetséges megoldás.

- *nem-bázis változók*: x_1, x_2, x_3
- *bázis változók*: x_4, x_5, x_6.

Figyeljük meg, hogy a bázis változók a nem-bázis változókkal vannak kifejezve:

$$\begin{aligned} x_4 &= 5 - 2x_1 - 3x_2 - x_3 \\ x_5 &= 11 - 4x_1 - x_2 - 2x_3 \\ x_6 &= 8 - 3x_1 - 4x_2 - 2x_3 \\ z &= 0 + 5x_1 + 4x_2 + 3x_3. \end{aligned}$$

1. lépés: Észrevesszük, hogy amíg az x_1 változó értékét tudjuk növelni legalább

$$\frac{5}{2} = \min\left(\frac{5}{2}, \frac{11}{4}, \frac{8}{3}\right),$$

értékig, minden x_i nemnegatív marad, míg a z növekszik.

Állítsuk be $x_1 = 5/2$ értéket, és helyettesítsünk be a szótárba. Kapjuk, hogy $x_2, x_3, x_4 = 0$, $x_5 = 1$, $x_6 = 1/2$, valamint $z = 25/2$ és ez egy jobb lehetséges megoldás.

Az x_1 változót az iteráció *pivot* elemének nevezzük.

$$\begin{aligned}
x_4 &= 5 - 2x_1 - 3x_2 - x_3 \\
x_5 &= 11 - 4x_1 - x_2 - 2x_3 \\
x_6 &= 8 - 3x_1 - 4x_2 - 2x_3 \\
z &= 0 + 5x_1 + 4x_2 + 3x_3.
\end{aligned}$$

Fejezzük most ki az x_1, x_5, x_6, z változókat az x_2, x_3, x_4 *új nem-bázis változók*kal (azok egyelőre 0-ra vannak állítva), így kapva az új szótárat.
Ehhez használjuk a szótár 1. sorát, ahol tehát az x_1 változót ki tudjuk fejezni az x_2, x_3, x_4 változókkal:

$$x_1 = \frac{1}{2}\bigl(5 - 3x_2 - x_3 - x_4\bigr)$$

és helyettesítük be jobb oldalba az x_1-et a maradék egyenletekben.

Ekkor az új szótár alakja:

$$x_1 = \frac{5}{2} - \frac{3}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4 \tag{5}$$
$$x_5 = 1 + 5x_2 + 2x_4 \tag{6}$$
$$x_6 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 + \frac{3}{2}x_4 \tag{7}$$
$$z = \frac{25}{2} - \frac{7}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 - \frac{5}{2}x_4. \tag{8}$$

Természetesen még mindig a

$$\max z \quad \text{s.t.} \quad x_1, \ldots, x_6 \geq 0,$$

feladatot oldjuk meg, ahol feltételként az (5)–(8) egyenleteket használjuk; ez az új LP ekvivalens az eredetivel.

Ugyanakkor a szótárból kaphatunk egy jobb lehetséges megoldást is: ha a nem-bázis változók értékét 0-ra állítjuk.

$$\begin{aligned}
x_1 &= \frac{5}{2} - \frac{3}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4 \\
x_5 &= 1 + 5x_2 + 2x_4 \\
x_6 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 + \frac{3}{2}x_4 \\
z &= \frac{25}{2} - \frac{7}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 - \frac{5}{2}x_4.
\end{aligned}$$

2. lépés: Ugyanezzel az ötlettel folytatjuk: az x_2 vagy x_4 értékének növelése haszontalan lenne, hiszen azzal csökkentenénk a célfüggvény értékét.

Ezért, legyen x_3 a pivot elem, amelyet növelhetünk az

$$1 = \min\bigl(5, +\infty, 1\bigr),$$

értékik, amely egy javított megoldáshoz vezet: $x_2, x_4, x_6 = 0, x_1 = 2, x_3 = 1, x_5 = 1$, valamint $z = 13$ és az x_2, x_4, x_6 nem-bázis változókhoz tartozó szótár alakja most:

$$\begin{aligned}
x_3 &= 1 + x_2 + 3x_4 - 2x_6\\
x_1 &= 2 - 2x_2 - 2x_4 + x_6\\
x_5 &= 1 + 5x_2 + 2x_4\\
z &= 13 - 3x_2 - x_4 - x_6.
\end{aligned}$$

Itt be is fejezhetjük az algoritmus futását, hiszen

- a szótár utolsó sorában látjuk, hogy az x_2, x_4 or x_6 változók bármilyen szigorúan pozitív értéke mellett a célfüggvény értéke határozottan kisebb lesz, mint 13.
- a szótár további soraiból pedig látjuk, hogy ha az x_2, x_4 és x_6 változók értékei rögzítettek, akkor az x_3, x_1 és x_5 értékei szintén rögzítettek lesznek.
- Ezért, az utolsó szótár egy bizonyítékot ad az optimalitásra.

1.4.2. Szótár direkt meghatározása (lineáris algebra)

Nézzük most meg, hogy a szótárat hogyan tudjuk közvetlenül meghatározni. Vegyük az előző példát:

$$\begin{aligned}
x_3 &= 1 + x_2 + 3x_4 - 2x_6\\
x_1 &= 2 - 2x_2 - 2x_4 + x_6\\
x_5 &= 1 + 5x_2 + 2x_4\\
z &= 13 - 3x_2 - x_4 - x_6,
\end{aligned} \tag{9}$$

Ezt az alakot tehát 2 lépés után kaptuk. Megmutatjuk, hogy az eredeti LP feladatból is közvetlenül megkaphatjuk ezt a felírást.

$$\begin{aligned}
\text{(LPI)} \quad & \max 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6\\
\text{feltéve, hogy } & 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 5\\
& 4x_1 + x_2 + 2x_3 + x_5 = 11\\
& 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_6 = 8\\
& x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0
\end{aligned}$$

The constraints of (LPI) imply a functional dependence between the nonnegative decision variables x_i, expressed by the linear system

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \tag{10}$$

ahol

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ 11 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

The basic variables of dictionary (9) are x_3, x_1, x_5. Writing

$$\mathbf{x}_B := \begin{bmatrix} x_3 & x_1 & x_5 \end{bmatrix}^\mathsf{T}, \qquad \mathbf{x}_N := \begin{bmatrix} x_2 & x_4 & x_6 \end{bmatrix}^\mathsf{T}$$

$$\mathbf{A}_B := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{A}_N := \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(10) can be written as

$$\mathbf{A}_B\,\mathbf{x}_B + \mathbf{A}_N\,\mathbf{x}_N = \mathbf{b}.$$

Solving for the basic variables $\mathbf{x}_B$, we obtain

$$\mathbf{x}_B = \mathbf{A}_B^{-1}\left(\mathbf{b} - \mathbf{A}_N\mathbf{x}_N\right). \tag{11}$$

Likewise, the objective function can be written as

$$z = \mathbf{c}_B^\mathsf{T}\,\mathbf{x}_B + \mathbf{c}_N^\mathsf{T}\,\mathbf{x}_N,$$

where

$$\mathbf{c}_B = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 0 \end{bmatrix}^\mathsf{T}, \quad \mathbf{c}_N = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \end{bmatrix}^\mathsf{T},$$

and substituting from (11), we find

$$z = \mathbf{c}_B^\mathsf{T}\mathbf{A}_B^{-1}\mathbf{b} + \left(\mathbf{c}_N^\mathsf{T} - \mathbf{c}_B^\mathsf{T}\mathbf{A}_B^{-1}\mathbf{A}_N\right)\mathbf{x}_N.$$

Dictionary (9) is now just the system of equations

$$\mathbf{x}_B = \mathbf{A}_B^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{A}_B^{-1}\mathbf{A}_N\mathbf{x}_N, \qquad z = \mathbf{c}_B^\mathsf{T}\mathbf{A}_B^{-1}\mathbf{b} + \left(\mathbf{c}_N^\mathsf{T} - \mathbf{c}_B^\mathsf{T}\mathbf{A}_B^{-1}\mathbf{A}_N\right)\mathbf{x}_N.$$

1. Definíció. *A* dictionary *of the LP problem (P)* $\max_{\mathbf{x}}\{\mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x} : \ \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geq 0\}$ *is a system of equations*

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_B &= \mathbf{A}_B^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{A}_B^{-1}\mathbf{A}_N\mathbf{x}_N, \\ z &= \mathbf{c}_B^\mathsf{T}\mathbf{A}_B^{-1}\mathbf{b} + \left(\mathbf{c}_N^\mathsf{T} - \mathbf{c}_B^\mathsf{T}\mathbf{A}_B^{-1}\mathbf{A}_N\right)\mathbf{x}_N, \end{aligned}$$

equivalent to

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\mathbf{x} &= \mathbf{b}, \\ z &= \mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x}, \end{aligned}$$

where up to column perturbation $\mathbf{A} = \left[\begin{smallmatrix} \mathbf{A}_B & \mathbf{A}_N \end{smallmatrix}\right]$ *and* $\mathbf{x} = \left[\begin{smallmatrix} \mathbf{x}_B^\mathsf{T} & \mathbf{x}_N^\mathsf{T} \end{smallmatrix}\right]^\mathsf{T}$ *is a block decomposition such that* $\mathbf{A}_B$ *is nonsingular.*

A dictionary is called feasible *if* $\mathbf{A}_B^{-1}\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$*, so that* $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_B, \mathbf{x}_N) = (\mathbf{A}_B^{-1}\mathbf{b}, \mathbf{0})$ *is a feasible (but generally suboptimal) solution.* $(\mathbf{x}_B, \mathbf{x}_N)$ *is then called a* basic feasible solution.

1.5. Dualitás

Példaként tekintsük az előbbi LP feladatot:

$$\begin{aligned} \text{(P)} \quad \max\ & 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 \\ \text{feltéve, hogy}\ & 2x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 5 \\ & 4x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 11 \\ & 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 8 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{aligned}$$

Láttuk, hogy az optimális megoldás értéke 13.

Az egészértékű programozásban amikor relaxált LP feladattal foglalkozunk, akkor gyakran nem optimális megoldást keresünk, hanem alsó- és felső korlátokat.

Világos, hogy alsó korlátként bármilyen lehetséges megoldást vehetünk. Pédául $x_1, x_2 = 1$, $x_3 = 0$ fízibilis, a célfüggvény értéke ekkor 9.

Hogyan kaphatunk felső korlátot? Példákat mutatunk:

- Ha például az első korlátozó feltételt megszorozzuk 3-mal, kapjuk, hogy

  $$6x_1 + 9x_2 + 3x_3 \leq 15,$$

  és mivel $x_1, x_2, x_3 \geq 0$, felső korlátot kapunk a célfüggvényre:

  $$z = 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 \leq 6x_1 + 9x_2 + 3x_3 \leq 15,$$

- Hasonlóképpen, ha az első két korlátozó feltétel összegét vesszük, akkor is felső korlátot kapunk:

  $$z = 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 \leq 6x_1 + 4x_2 + 3x_3 \leq 16.$$

More generally, such bounds can be obtained from any sum of positive multiples of the constraints for which the resulting coefficients are no smaller than the corresponding coefficients of the objective function:

$$\begin{bmatrix} 5 & 4 & 3 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix}, \quad y_1, y_2, y_3 \geq 0$$

$$\Rightarrow z \leq \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 11 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

A legjobb felső korlátot az alábbi LP feladat megoldásával kapjuk:

$$
\begin{aligned}
\text{(D)} \quad & \min_{y} 5y_1 + 11y_2 + 8y_3 \\
& \text{s.t. } 2y_1 + 4y_2 + 3y_3 \geq 5, \\
& \quad 3y_1 + y_2 + 4y_3 \geq 4, \\
& \quad y_1 + 2y_2 + 2y_3 \geq 3, \\
& \quad y_1, y_2, y_3 \geq 0.
\end{aligned}
$$

Ezt az alakot az eredeti feladat *duálisának* nevezzük. Innen jönnek a primál és duál feladat elnevezések.

Dualitás: Általános alak

Vegyünk egy LP feladatot a következő formában:

$$
\begin{aligned}
\max \quad & \mathbf{c}^T\mathbf{x} + \mathbf{d}^T\mathbf{s} = z^* \\
\text{feltéve, hogy} \quad & \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{C}\mathbf{s} \leq \mathbf{a} \\
& \mathbf{B}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{s} = \mathbf{b} \\
& \mathbf{x} \geq 0 \\
& \mathbf{s} \text{ tetszőleges}
\end{aligned}
$$

Ennek a feladatnak a duálisa:

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \mathbf{a}^T\mathbf{y} + \mathbf{b}^T\mathbf{t} \\
\text{feltéve, hogy} \quad & \mathbf{A}^T\mathbf{y} + \mathbf{B}^T\mathbf{t} \geq \mathbf{c} \\
& \mathbf{C}^T\mathbf{y} + \mathbf{D}^T\mathbf{t} = \mathbf{d} \\
& \mathbf{y} \geq 0 \\
& \mathbf{t} \text{ tetszőleges}
\end{aligned}
$$

A duális duálisa a primál feladat.

2. Tétel (Gyenge dualitás)**.** *Ha* $\mathbf{x}$ *egy lehetséges megoldás a primál feladatban és* $\mathbf{y}$ *egy lehetséges megoldás a duálisban, akkor*

$$\mathbf{c}^T\mathbf{x} \leq \mathbf{y}^T\mathbf{b}$$

3. Tétel (Erős dualitás)**.** *Ha* $\mathbf{x}^*$ *a primál feladat optimális megoldása és* $\mathbf{y}^*$ *a duális feladat optimális megoldása, akkor*

$$\mathbf{c}^T\mathbf{x}^* = \mathbf{y}^{*T}\mathbf{b}$$

Ezek egyik következménye, hogy ha bármelyik feladat nem korlátos, a másiknak nincs lehetséges megoldása.

1.6. Redukált költség

Vagy reduced cost.

Röviden: ha adott egy szótár alak, akkor a z együtthatóit nevezzük redukált költségeknek. Például a fenti feladatban a kezdeti szótárban:

$$\begin{aligned} x_4 &= 5 - 2x_1 - 3x_2 - x_3 \\ x_5 &= 11 - 4x_1 - x_2 - 2x_3 \\ x_6 &= 8 - 3x_1 - 4x_2 - 2x_3 \\ z &= 0 + 5x_1 + 4x_2 + 3x_3. \end{aligned}$$

az x_1 redukált költsége 5, az x_2 redukált költsége 4, míg az x_3 redukált költsége 3.

Az eddigiek alapján kijelenthetjük, hogy ha minden redukált költség nem-pozitív, akkor az optimális megoldásban vagyunk, a szimplex algoritmus megállhat.

1.7. Poliéderek és politópok

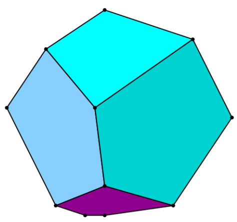
1. Definíció (Poliéder). *Egy poliéder egy $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^n$ halmaz, amit véges sok affin féltér metszeteként írhatunk le:*

$$\mathcal{P} = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i, (i = 1, \ldots, m) \right\} \tag{12}$$

2. Definíció (Politóp). *Egy politóp egy $\mathcal{P}' \subset \mathbb{R}^n$ halmaz, amit véges sok pont által meghatározott konvex testként írhatunk le:*

$$\mathcal{P}' = \operatorname{conv}\left\{ \mathbf{x}^k : k \in [1, p] \right\} = \left\{ \sum_{k=1}^{p} \lambda_k \mathbf{x}^k : \sum_{k=1}^{p} \lambda_k = 1, \lambda_k \geq 0, \forall k \right\}$$

valamely $\mathbf{x}^1, \ldots, \mathbf{x}^p \in \mathbb{R}^n$-re.

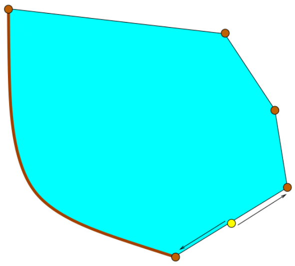


1. ábra. Példa 3 dimenziós politópra

3. Definíció (Extremális pont). *Legyen $C \in \mathbb{R}^n$ egy konvex halmaz. Egy $\mathbf{x} \in C$ pont egy extremális pontja C-nek, ha $\mathbf{x}$ nem áll elő két, $\mathbf{x}$-től eltérő pont konvex kombinációjaként:*

$$\nexists \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in C \setminus \{\mathbf{x}\} : \lambda \in (0, 1) \text{ úgy, hogy } \mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}_1 + (1 - \lambda) \mathbf{x}_2$$

4. Tétel (Minkowski tétele). *Ha $\mathcal{P} \in \mathbb{R}^n$ egy poliéder és korlátos, akkor $\mathcal{P}$ egy politóp, azaz $\mathcal{P}$-nek van egy X véges extremális ponthalmaza és $\mathcal{P} = \operatorname{conv}(X)$.*



2. ábra. Illusztráció az extremális pont fogalmához

1.8. Branch and Bound

A Branch and Bound egy programozási feladatmegoldási módszer, amit ILP-k megoldására is használhatunk. A lényege:

1. oldjuk meg a relaxált LP feladatot
2. ha valamelyik $x_i = a$ változó nem egész, készítsünk két elágazást (két új problémát úgy, hogy hozzávesszük az alábbi feltételek egyikét):
   a) $x_i \geq \lceil a \rceil$
   b) $x_i \leq \lfloor a \rfloor$
3. válasszunk egy részproblémát, oldjuk meg és ha még mindig nem egész, ágazzunk el – vagy ha nem korlátos, zárjuk le az ágat
4. ha minden ágat lezártunk, válasszuk a legjobb egészértékű megoldást